



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-14 FEBRUARIE 2015

Clasa a XII-a

SUBIECTUL I :

Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ definim legea de compoziție: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

- Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.
- Să se rezolve ecuația: $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de "2015" ori}} = 0$

SUBIECTUL II :

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

- Să se arate că f este convexă pe $[0, 2]$
- Să se demonstreze că $f(x) \leq (e - 1)x + 1, \forall x \in [0, 1]$
- Arătați că

$$\int_0^2 f(x) dx < \frac{e^4 + 2e + 1}{2}$$

SUBIECTUL III:

Este funcția :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \int_t^{t+1} [x]^2 dx$$

injectivă?

SUBIECTUL IV :

Să se demonstreze că:

$$Aut(\mathbb{Z}, +) = \{f|f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(f(x)y) + xy = 2f(x) + f(y)\}$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.