Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Negreşti Oaş, 4 aprilie 2018
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a şi b care verifică egalitatea

$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b şi cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b.

Soluţie. Dacă $(a, b) = d$ şi $[a, b] = m$, atunci $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ şi $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d$, unde $(a_1, b_1) = 1$. **2p**

Deci $a_1 \cdot d \cdot d = b_1 \cdot d + a_1 \cdot b_1 \cdot d$, adică $a_1 \cdot d = b_1 + a_1 \cdot b_1$, ... **2p**

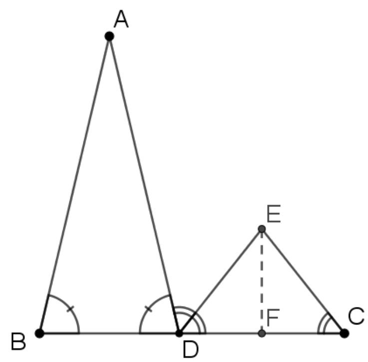
de unde $a_1 | b_1$, dar $(a_1, b_1) = 1$, deci $a_1 = 1$, ... **1p**

deci $d = b_1 + b_1 = 2b_1$, $a = 2b_1$ şi $b = 2b_1^2$ **1p**

Pentru orice număr natural b_1, obţinem o pereche de numere naturale cu proprietatea din enunţ, deci sunt o infinitate de astfel de numere. **1p**

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB, BC şi AD, unde $D \in (BC)$. Arătaţi că mediatoarea segmentului DC, bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ şi dreapta AC sunt concurente.

Soluţie



Fie F mijlocul segmentului DC şi E intersecţia bisectoarei unghiului $\widehat{ADC}$ şi a mediatoarei segmentului DC.

În triunghiul isoscel DEC avem $\widehat{EDC} \equiv \widehat{DCE}$. Pe de altă parte $\widehat{EDC} \equiv \widehat{ADE}$, DE fiind bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$. **2p**

Astfel în triunghiul isoscel ABD avem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 180° - 2 \cdot m(\widehat{ADE})$. **2p**

Deci în triunghiul isoscel ABC măsurile unghiurilor congruente sunt $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = \dfrac{180° - m(\widehat{ABC})}{2} = m(\widehat{ECD})$. **2p**

Deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$, de unde punctele A, E şi C sunt coliniare, adică dreptele din cerinţă sunt concurente. **1p**

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ şi $d = 2a + 1002$.

a) Arătaţi că $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care $\dfrac{a+n}{b+n} > \dfrac{c+n}{d+n}$.

Soluţie.

a) $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+1}{2a+1002} - \dfrac{a}{2a+1000} = \dfrac{1000}{(2a+1002)(2a+1000)} > 0$ de unde rezultă concluzia. **3p**

b) $\dfrac{a+n}{b+n}-\dfrac{c+n}{b+n}=\dfrac{9+n}{1018+n}-\dfrac{10+n}{1020+n}=\dfrac{n-1000}{(1018+n)(1020+n)}>0$, rezultă $n>1000$, iar cel mai mic număr natural cu această proprietate este $n=1001$. **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulţime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulţimea tuturor resturilor obţinute la împărţirea unui element din A la un element din A este $\{0,1,2,\ldots,n\}$. De exemplu, mulţimea $\{3,4,5\}$ este o mulţime completă de mărime 4.

Determinaţi numărul minim de elemente ale unei mulţimi complete de mărime 100.

Soluţie. Răspuns: 27.

Un exemplu de mulţime completă de mărime 100 cu 27 de elemente este

$$\{76,77,78,\ldots,100\}\cup\{51,152\}.$$

Într-adevăr, la împărţirile $100:x$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $0,1,2,\ldots,24$, la împărţirile $x:51$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $25,26,\ldots,49$, la împărţirile $152:x$, $77\leq x\leq 100$, obţinem resturile $52,53,\ldots,75$, la împărţirile $x:152$, $76\leq x\leq 100$, obţinem resturile $76,77,\ldots,100$, la împărţirea $51:152$ obţinem restul 51 şi la împărţirea $152:51$ obţinem restul 50. .... **4p**

Arătăm acum că orice mulţime completă de mărime 100 are cel puţin 27 de elemente.

Observăm că dacă $A=\{a_1<a_2<\ldots<a_n\}$ este o mulţime de tipul cerut, atunci cel mai mare rest care se obţine la împărţirea a două elemente din A este a_{n-1}, obţinut la împărţirea $a_{n-1}:a_n$. Deducem că $a_{n-1}=100$.

Să urmărim acum resturile $\geqslant 50$. Aceste resturi se obţin sigur când împărţim elemente $\geqslant 51$ la elemente mai mari decât ele şi se mai pot obţine doar când împărţim a_n la elemente $\geqslant 51$. Astfel, numărul resturilor $\geqslant 50$ obţinute este cel mult dublul numărului elementelor lui A cuprinse între 51 şi 100. Deoarece numărul resturilor $\geqslant 50$ care trebuie obţinute este 51, rezultă că A trebuie să conţină cel puţin 26 de numere dintre $51,52,53,\ldots,100$. Cum A conţine şi elementul $a_n>100$, reiese că A are cel puţin 27 de elemente. **3p**