TESTUL 2, 2022

Problema 1. Fie ABC un triunghi scalen ascuţitunghic şi fie ω cercul său Euler. Tangenta t_A a lui ω, prin piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC, intersectează a doua oară cercul de diametru AB în punctul K_A. Dreapta determinată de picioarele înălţimilor din A şi C ale triunghiului ABC, intersectează dreptele AK_A şi BK_A în punctele L_A, respectiv M_A, iar dreptele t_A şi CM_A se intersectează în punctul N_A. Punctele K_B, L_B, M_B, N_B şi K_C, L_C, M_C, N_C sunt definite în mod analog, pentru tripletele (B, C, A), respectiv (C, A, B). Arătaţi că dreptele L_AN_A, L_BN_B şi L_CN_C sunt concurente.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi fie B' şi C' picioarele înălţimilor sale din B, respectiv C. Fie B'_A şi B'_C simetricele lui B' în raport cu dreptele BC, respectiv AB. Cercul $BB'_AB'_C$, centrat în O_B, intersectează a doua oară dreapta AB în X_B. Punctele C'_A, C'_B, O_C, X_C sunt definite în mod analog, prin înlocuirea perechii (B, B') cu perechea (C, C'). Arătaţi că O_BX_B şi O_CX_C sunt paralele.

Problema 3. Fixăm un număr întreg $n \geq 2$ şi considerăm n^2 numere reale strict pozitive a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:
(1) $a_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$; şi
(2) Pentru fiecare $j = 2, \ldots, n$, numerele a_{ij}, $i = 1, \ldots, j-1$, formează o permutare a numerelor $\frac{1}{a_{ji}}$, $i = 1, \ldots, j-1$.
Fie $s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$. Determinaţi valoarea maximă a sumei $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i}$.

Problema 4. Orice număr întreg N, care este suma a trei pătrate perfecte, este evident exprimabil sub forma

$$N = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{1 + abcd},$$

unde a, b, c, d sunt numere naturale. Este adevărată afirmaţia reciprocă?

Problema 5. Fixăm două numere întregi $m \geq 2$ şi $n \geq 2$. Fie S o mulţime de puncte laticiale situate în dreptunghiul cartezian $[1, m] \times [1, n]$; un punct laticial este un punct care are ambele coordonate întregi. Arătaţi că, dacă $|S| \geq m + n + \left\lfloor \frac{1}{4}m + \frac{1}{4}n - \frac{1}{2} \right\rfloor$, atunci există un cerc care trece prin cel puţin patru puncte din S, distincte două câte două.