OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2015

CLASA a XI-a

Problema 1.

a) Să se arate că ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ nu are soluții în $M_2(\mathbb{C})$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A^n; n \in \mathbb{N}^*$.

Vasile Gorgotă

Problema 2.

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + I_3) = \det(A + 2I_3)$. Să se arate că

$$2\det(A + I_3) + \det(A - I_3) + 6 = 3\det(A).$$

G.M. 6-7-8/2014

Problema 3.

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n + 2) \leq 0, \forall n \geq 0.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Vasile Gorgotă

Problema 4.

a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{2}$.

b) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că are limite laterale finite în orice punct din $\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția transformă mulțimi mărginite în mulțimi mărginite.

***

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.