Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a XII-a

Problema 1. a) Să se determine numărul de elemente inversabile din monoidul $(Z_{2014},\cdot)$

b) Să se demonstreze că mulţimea tuturor elementelor inversabile din monoidul anterior este un grup abelian.

Problema 2. Să se calculeze $\int \frac{1}{x^4-4x^3+x^2+16x-20}dx$ **,** $x>2$**.**

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ **un grup abelian cu 2014 elemente. Să se demonstreze că funcţia** $f:G\to G, f(x)=x^3$ **, este un automorfism de grupuri.**

Problema 4. Să se demonstreze că funcţia , $f:R\to R$ **,** $f(x)=\begin{cases}\sin^n\frac{1}{x}, x\neq 0\\ a \quad\quad , x=0\end{cases}$ **, are primitive pe** R **pentru** $n=3$ **şi pentru o singură valoare a parametrului real** a **şi nu are primitive pe** R **pentru** $n=2$ **şi valorea lui** a **găsită anterior.**

Timp de lucru:3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, Iaşi

14.02.2014

CLASA a XII-a

Problema 1. a) Să se determine numărul de elemente inversabile din monoidul $(Z_{2014},\cdot)$

b) Să se demonstreze că mulţimea tuturor elementelor inversabile din monoidul anterior este un grup abelian.

BAREM: a) Un element este inversabil dacă şi numai dacă este prim cu 2014. Deci avem 936 elemente inversabile 4p

b) Produsul a două elemente inversabile, este inversabil şi inversul unui element inversabil, este şi el inversabil.Evident înmulţirea este comutativă şi asociativă 3p

Problema 2. Să se calculeze $\int \frac{1}{x^4-4x^3+x^2+16x-20}dx$, $x>2$.

BAREM: Vom descompune astfel :

$x^4-4x^3+x^2+16x-20=(x-2)(x^3-2x^2-3x+10)=(x-2)(x+2)(x^2-4x+5)$ **......................3p**

Se desface integrala în următoarele trei integrale :

$\int \frac{a}{x-2}dx+\int \frac{b}{x+2}dx+\int \frac{cx+d}{x^2-4x+5}dx$ **...2p**

Finalizare 2p

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian cu 2014 elemente. Să se demonstreze că funcţia $f:G\to G, f(x)=x^3$, este un automorfism de grupuri.

BAREM: Grupul este abelian deci funcţia dată este morfism de grupuri 2p

Cu ajutorul Teoremei lui LAGRANGE, se arată că avem Ker(f)={e}, de aici vom avea că funcţia dată este injectivă..3p

Funcţia este definită de la o mulţime finită în ea însăşi deci este si surjectivă 2p

Problema 4. Să se demonstreze că funcţia , $f:R\to R$ **,** $f(x)=\begin{cases}\sin^n\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ **, are primitive pe** R **pentru** $n=3$ **şi pentru o singură valoare a parametrului real** a **şi nu are primitive pe** R **pentru** $n=2$ **şi valorea lui** a **găsită anterior.**

BAREM: Se demonstrează că funcţia $g(x)=\begin{cases}c\sin\frac{d}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ **are primitive pe R 2p**

Se foloseşte formula $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$ **şi se arată că funcţia din enunţ (pt n=3) are primitive doar pentru a=0...3p**

Se foloseşte formula $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ **şi se arată că funcţia din enunţ (pt n=2) nu are primitive pentru a=0 (ar trebui ca a să fie egal cu 1/2 pentru a avea primitive).......................................2p**

Timp de lucru:3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro