Barem de notare – clasa a V-a

Problema 1. Aflați ultimele trei cifre ale numărului nenul n, știind că prin împărțirea lui $29 \cdot n$ la 250 obținem restul 67, iar prin împărțirea lui $23 \cdot n$ la 200 obținem restul 29.

Gazeta matematică

Soluţie:

Din teorema împărțirii cu rest avem relațiile:

$$\begin{cases} 29n = 250x + 67 \quad (1) \\ 23n = 200y + 29 \quad (2) \end{cases}$$ **1p**

Înmulțind relația (1) cu 4 si relația (2) cu 5 obținem:

$$\begin{cases} 116n = 1000x + 268 \quad (3) \\ 115n = 1000y + 145 \quad (4) \end{cases}$$ **2p**

Scăzând membru cu membru relațiile (3) si (4) obținem:

$\{n = 1000(x - y) + 123$ **2p**

$U_3(n) = U_3(1000(x-y)+123) = \underline{123}$ **2p**

Problema 2. Să se determine $n \in N^*$ si cifrele a, b, c știind că are loc relația:
$\overline{abc} + 2 \cdot \overline{abc} + 2^2 \cdot \overline{abc} + ... + 2^n \cdot \overline{abc} = 2^{2n+1} - 2^n.$

Soluţie:

$\overline{abc}(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n) = 2^{2n+1} - 2^n$ **1p**

$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ **2p**

$2^{2n+1} - 2^n = 2^n \cdot (2^{n+1} - 1)$ **1p**

$\overline{abc} = 2^n$ **1p**

$n \in \{7, 8, 9\} \Rightarrow (a, b, c) \in \{(1, 2, 8); (2, 5, 6); (5, 1, 2)\}$ **2p**

Problema 3. Fie A o mulţime de numere naturale care îndeplineşte simultan condiţiile:

a) $2 \in A, 3 \in A$;
b) Dacă $x \in A,$ atunci $4x \in A$;
c) Dacă $5x - 2 \in A$, atunci $x \in A$.

Arătaţi că $26 \in A$ şi $154 \in A$.

Soluţie:

$2 \in A \Rightarrow 4 \cdot 2 = 8 \in A \Rightarrow 4 \cdot 8 = 32 \in A \Rightarrow 4 \cdot 32 = 128 \in A$ **2p**

$128 = 5 \cdot 26 - 2 \in A \Rightarrow 26 \in A$ **1,5p**

$3 \in A \Rightarrow 4 \cdot 3 = 12 \in A \Rightarrow 4 \cdot 12 = 48 \in A \Rightarrow 4 \cdot 48 = 192 \in A \Rightarrow 4 \cdot 192 = 768 \in A$ ....**...2p**

$768 = 5 \cdot 154 - 2 \in A \Rightarrow 154 \in A$ **1,5p**

Problema 4. Să se arate că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte:

$a = 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n, n \in \mathbb{N}$ şi $b = 5^{34} + 5^{17}$.

Soluţie:

$a = 2^n \cdot 3^n \cdot (3+2) = 2^n \cdot 3^n \cdot 5$ **1p**

a se divide cu 5 dar nu se divide cu 5^2 ....**1,5p**

Deci a nu este pătrat perfect. ....**...0,5p**

$u(b) = 0$ **0,5p**

$b = 5^{17} \cdot (5^{17} + 1)$ **0,5p**

Observăm că $5^{17} \cdot 5^{17} < 5^{17} \cdot (5^{17} + 1) < (5^{17} + 1) \cdot (5^{17} + 1)$ deoarece $5^{17} < 5^{17} + 1$ **2p**

Deci $(5^{17})^2 < b < (5^{17} + 1)^2$ **0,5p**

Cum b este cuprins între două pătrate perfecte consecutive nu este pătrat perfect. ....**..0,5p**