



Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016

Clasa a V-a

- I.** Dragoș, Șerban și tatăl lor au fost la pescuit. În timp ce tatăl prindea 10 pești, Dragoș prindea 5 pești, iar Șerban prindea 4 pești. În două ore, pescuind cu toții în același ritm, Dragoș a prins 25 de pești.
- Calculați câți pești au prins, în două ore, cei trei pescari.
 - După câteva ore Dragoș a prins un număr impar de pești iar împreună au prins 191 de pești. Câți pești a prins fiecare?
- Supliment Gazeta Matematică 12/2014 (enunț modificat)*
- II.** Se consideră numerele $a = 2009 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2008)$ și $b = 1 + 3 + \dots + 2009$.
- Arătați că a și b sunt pătrate perfecte.
 - Arătați că între numerele a și $4 \cdot b$ nu există niciun pătrat perfect.
- Prof. Avramescu Irina, Școala Gimnazială Nr. 9 Reșița
- III.** Determinați cel mai mic număr de patru cifre distincte care verifică simultan următoarele proprietăți:
- numărul format din primele două cifre este de forma $2^x + 2^y$, unde x și y sunt numere naturale;
 - numărul format din ultimele două cifre este de forma 2^x sau 2^y , cu x și y numere naturale.
- Prof. Pirvu Camelia, Școala Gimnazială "Romul Ladea" Oravița
- IV.** O mulțime de trei numere naturale nenule se numește *simpatică* dacă unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două.
- Determinați mulțimile *simpatică* care se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.
 - Calculați câte mulțimi *simpatică* se pot forma cu elementele mulțimii $B = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$.
- Iancu Maria, Școala Gimnazială "Romul Ladea" Oravița

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada națională de matematică, faza locală, județul Caraș-Severin, 2016
Barem de corectare și notare
Clasa a V-a

<p>I. Dragoș, Șerban și tatăl lor au fost la pescuit. În timp ce tatăl prindea 10 pești, Dragoș prindea 5 pești, iar Șerban prindea 4 pești. În două ore, pescuind cu toții în același ritm, Dragoș a prins 25 de pești.</p> <p>a) Calculați câți pești au prins, în două ore, cei trei pescari.</p> <p>b) După câteva ore Dragoș a prins un număr impar de pești, iar împreună au prins 191 de pești. Câți pești au prins fiecare?</p> <p style="text-align: right;"><i>Supliment Gazeta Matematică 12/2014 (enunț modificat)</i></p>	
a) Tatăl a prins 50 pești, Șerban a prins 20 pești iar toți împreună au prins 95 pești	3p
b) Tatăl a prins 100 sau 101 pești, Dragoș a prins 50 sau 51 pești, Șerban a prins 40 sau 41 pești.	2p
Din imparitate rezultă că Dragoș a prins 51 de pești, Șerban 40 iar tatăl 100	2p
<p>II. Se consideră numerele $a = 2009 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 2008)$ și $b = 1 + 3 + \dots + 2009$.</p> <p>a) Arătați că a și b sunt pătrate perfecte.</p> <p>b) Arătați că între numerele a și $4 \cdot b$ nu există niciun pătrat perfect.</p>	
a) $a = 2009 + 2008 \cdot 2009 = 2009(1 + 2008) = 2009 \cdot 2009$	2p
$b = 1 + 2 + \dots + 2010 - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 1005) = 1005 \cdot 2011 - 1005 \cdot 1006 = 1005 \cdot 1005$	2p
b) $4b = 2010 \cdot 2010$	2p
Intre două pătrate perfecte consecutive nu există pătrat perfect	1p
<p>III. Determinați cel mai mic număr de patru cifre distincte care verifică următoarele proprietăți:</p> <p>a) numărul format din primele două cifre este de forma $2^x + 2^y$, unde x și y sunt numere naturale;</p> <p>b) numărul format din ultimele două cifre este de forma 2^x sau 2^y, cu x și y numere naturale.</p>	
$2^k \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$. Fie \overline{abcd} numărul căutat $\Rightarrow \overline{ab} = 2^x + 2^y$ și $\overline{cd} = 2^x$ sau 2^y .	1p
Dacă $2^x \in \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$ $\Rightarrow \overline{ab} \in \{2^0 + 2^4, 2^0 + 2^5, 2^0 + 2^6, 2^1 + 2^3, 2^1 + 2^4, 2^1 + 2^5, 2^1 + 2^6, 2^2 + 2^3, 2^2 + 2^4, 2^2 + 2^5, 2^2 + 2^6, 2^3 + 2^3, 2^3 + 2^4, 2^3 + 2^5, 2^3 + 2^6, 2^4 + 2^5, 2^4 + 2^6, 2^5 + 2^6\}$	3p
Soluția care verifică condițiile problemei este: $\overline{ab} = 2^2 + 2^4 = 20 \Rightarrow \overline{cd} = 2^4 = 16 \Rightarrow \overline{abcd} = 2016$.	3p

<p>IV. O mulțime de trei numere naturale nenule se numește <i>simpatică</i> dacă unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două.</p> <p>a) Determinați mulțimile <i>simpatice</i> care se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.</p> <p>b) Calculați câte mulțimi <i>simpatice</i> se pot forma cu elementele mulțimii $B = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$.</p>	
<p>a) O mulțime simpatică este de forma $\{a, b, (a+b):2\}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, a și b cu aceeași paritate.</p> <p>Mulțimile <i>simpatice</i> formate cu numerele de la 1 la 10 sunt:</p> <p>Pentru $a = 1 \Rightarrow \{1, 3, 2\}, \{1, 5, 3\}, \{1, 7, 4\}, \{1, 9, 5\} \Rightarrow 4$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 2 \Rightarrow \{2, 4, 3\}, \{2, 6, 4\}, \{2, 8, 5\}, \{2, 10, 6\} \Rightarrow 4$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 3 \Rightarrow \{3, 5, 4\}, \{3, 7, 5\}, \{3, 9, 6\} \Rightarrow 3$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 4 \Rightarrow \{4, 6, 5\}, \{4, 8, 6\}, \{4, 10, 7\} \Rightarrow 3$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 5 \Rightarrow \{5, 7, 6\}, \{5, 9, 7\} \Rightarrow 2$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 6 \Rightarrow \{6, 8, 7\}, \{6, 10, 8\} \Rightarrow 2$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 7 \Rightarrow \{7, 9, 8\} \Rightarrow 1$ mulțime.</p> <p>Pentru $a = 8 \Rightarrow \{8, 10, 9\} \Rightarrow 1$ mulțime.</p> <p>În total sunt: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$ mulțimile <i>simpatice</i> formate cu numerele de la 1 la 10.</p>	3p
<p>b) Am observat, pe cazul particular de la a), că numărul mulțimilor <i>simpatice</i> ale unei mulțimi cu 10 numere este $5 \cdot 4 = 20$, unde 5 este jumătatea numărului de elemente al mulțimii. Deducem că se pot forma $1008 \cdot 1007 = 1015056$ mulțimi <i>simpatice</i> cu numerele de la 1 la 2016.</p> <p>Pentru $a = 1 \Rightarrow b \in \{5, 7, 9, \dots, 2015\} \Rightarrow 1007$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 2 \Rightarrow b \in \{4, 6, 8, \dots, 2016\} \Rightarrow 1007$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 3 \Rightarrow b \in \{5, 7, 9, \dots, 2015\} \Rightarrow 1006$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 4 \Rightarrow b \in \{6, 8, 10, \dots, 2016\} \Rightarrow 1006$ mulțimi.</p> <p>.....</p> <p>Pentru $a = 2011 \Rightarrow b \in \{2011, 2013\}, \{2011, 2015\} \Rightarrow 2$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 2012 \Rightarrow b \in \{2012, 2014\}, \{2012, 2016\} \Rightarrow 2$ mulțimi.</p> <p>Pentru $a = 2013 \Rightarrow b = 2015 \Rightarrow 1$ mulțime.</p> <p>Pentru $a = 2014 \Rightarrow b = 2016 \Rightarrow 1$ mulțime.</p>	2p
<p>În total există:</p> <p>$2 \cdot 1007 + 2 \cdot 1006 + \dots + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot (1007 + 1006 + \dots + 2 + 1) = 1008 \cdot 1007 = 1015056$ mulțimi <i>simpatice</i> ce se pot forma cu numerele de la 1 la 2016.</p>	2p