MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA-FILIALA TIMIŞ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2014
SUBIECTE clasa a VI-a

1. Un număr natural se numeşte *alternant* dacă are 2014 cifre şi oricare două cifre vecine ale sale au parităţi diferite. Care este cel mai mic număr *alternant* care este divizibil cu 9? Dar cel mai mare?

RMT

2. Calculaţi

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}$$

3. Fie punctele coliniare $A, B, C,$ în această ordine, iar semidreptele $(BD$ şi $(BE$ incluse în acelaşi semiplan determinat de dreapta AC astfel încât $(BD$ şi $(BE$ sunt perpendiculare. Ce valori poate lua măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABE$ şi $\sphericalangle DBC$?

4. Alina, Bogdan, Claudia, Denisa şi Eugen joacă partide de dublu la ping-pong. În fiecare joc, unul dintre copii stă pe margine, în timp ce ceilalţi patru joacă doi contra celorlalţi doi. Fiecare pereche joacă împotriva fiecăreia din perechile formate din jucătorii rămaşi exact o dată.

a) Câte partide s-au disputat în total?

b) Dacă Alina a câştigat 12 partide, iar Bogdan a câştigat 6 partide, câte partide a câştigat Claudia? Aflaţi toate posibilităţile şi justificaţi răspunsul.

Notă

- Timp de lucru efectiv: 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

succes !

- Prof. Zeno Blajovan, inspector şcolar pentru matematică – I.Ş.J. Timiş
- Lector.dr. Mihai Chiş-preşedinte S.S.M.R. – Filiala Timiş

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş | **Ministerul Educaţiei Naţionale** | **Societatea de Ştiinţe Matematice din România**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală - 21.02.2014

Clasa a VI-a

1. Un număr natural se numeşte *alternant* dacă are 2014 cifre şi oricare două cifre vecine ale sale au parităţi diferite. Care este cel mai mic număr *alternant* care este divizibil cu 9? Dar cel mai mare?

RMT

2. Calculaţi

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}.$$

3. Fie punctele coliniare A, B, C, în această ordine, iar semidreptele $(BD$ şi $(BE$ incluse în acelaşi semiplan determinat de dreapta AC astfel încât $(BD$ şi $(BE$ sunt perpendiculare. Ce valori poate lua măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABE$ şi $\sphericalangle DBC$?

4. Alina, Bogdan, Claudia, Denisa şi Eugen joacă partide de dublu la ping-pong. În fiecare joc, unul dintre copii stă pe margine, în timp ce ceilalţi patru joacă doi contra celorlalţi doi. Fiecare pereche joacă împotriva fiecăreia din perechile formate din jucătorii rămaşi exact o dată.

a) Câte partide s-au disputat în total?

b) Dacă Alina a câştigat 12 partide, iar Bogdan a câştigat 6 partide, câte partide a câştigat Claudia? Aflaţi toate posibilităţile şi justificaţi răspunsul.

Notă

- Timp de lucru efectiv: 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

1. Un număr natural se numeşte *alternant* dacă are 2014 cifre şi oricare două cifre vecine ale sale au parităţi diferite. Care este cel mai mic număr *alternant* care este divizibil cu 9? Dar cel mai mare?

RMT

Soluţie:
Cel mai mic număr alternant trebuie să înceapă cu 1. Urmează cea mai mică cifră pară posibilă, 0, cea mai mică cifră impară, 1, cea mai mică pară, 0, şi aşa mai departe, cea de-a 2012-a cifră o putem alege 0. Însă dacă alegem penultima cifră să fie 1, suma cifrelor alese până acum este 1007. Nu putem alege nicio cifră pară astfel încât suma cifrelor numărului format (deci numărul format) să fie divizibil cu 9. Vom alege atunci penultima cifră să fie 3. Putem atunci alege ultima cifră 8, iar numărul format, 1010...1038 va fi alternant şi divizibil cu 9. El este cel mai mic cu aceste proprietăţi.
Cel mai mare număr alternant care este multiplu de 9 va începe cu $\underbrace{9898...98}_{2012 \text{ cifre}}$. Suma cifrelor alese până aici este $(9+8)\cdot 1006 = M9+2$. Nu putem alege penultima cifră să fie 9 (nu vom găsi nicio cifră pară pentru care numărul format să fie divizibil cu 9), însă, alegându-l să fie 7, putem lua ultima cifră 0 şi obţine că cel mai mare număr alternant divizibil cu 9 este 989898...9870.

Barem:
Cel mai mic număr alternant divizibil cu 9
• are primele 2012 cifre egale cu 1010...10 .... **1p**
• are penultima cifră egală cu 3 .... **1p**
• este 1010...1038 .... **2p**
Cel mai mare număr alternant divizibil cu 9
• are primele 2012 cifre egale cu 9898...98 .... **1p**
• are penultima cifră egală cu 7 .... **1p**
• este 9898...9870 .... **1p**

Observaţii: (punctaje parţiale)
- pentru enunţarea/folosirea criteriului de divizibilitate cu 9 .... **1p**
- pentru ghicirea (fără nicio justificare) a unuia dintre numere **2p**
- pentru ghicirea (fără nicio justificare) a ambelor numere **3p**

2. Calculaţi

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}.$$

Soluţie şi barem:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98}-\frac{1}{99}}{\frac{1}{99}-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{1}{2\cdot 3}}{\frac{1}{3\cdot 4}}\cdot\frac{\frac{1}{4\cdot 5}}{\frac{1}{5\cdot 6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{1}{98\cdot 99}}{\frac{1}{99\cdot 100}}=$$ **3p**

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{100}}=50$$ **4p**

Observaţii: (punctaje parţiale)

- pentru a fi observat că ,,aproape toţi factorii se simplifică" dar identificarea greşită a factorilor care rămân .... **1p** (din cele 4p)

- pentru a fi ajuns la $\dfrac{1/2}{1/100}$ .... **3p** (din cele 4p)

3. Fie punctele coliniare A, B, C, în această ordine, iar semidreptele $(BD$ şi $(BE$ incluse în acelaşi semiplan determinat de dreapta AC astfel încât $(BD$ şi $(BE$ sunt perpendiculare. Ce valori poate lua măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABE$ şi $\sphericalangle DBC$?

Soluţie şi barem:

Fie $(BM$ şi $(BN$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABE$, respectiv $\sphericalangle DBC$.

Distingem două cazuri: I. $(BE \in Int(\sphericalangle ABD)$ sau II. $(BD \in Int(\sphericalangle ABE)$..... **2p**

Cazul I. Dacă notăm $m(\sphericalangle ABE)=a$ şi $m(\sphericalangle CBD)=b$, avem $a+90^\circ+b=180^\circ$, deci $a+b=90^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle MBN)=m(\sphericalangle MBE)+m(\sphericalangle EBD)+m(\sphericalangle DBN)=\frac{a}{2}+90^\circ+\frac{b}{2}=135^\circ$.. **2p**

Cazul II. Cu notaţiile de mai sus, avem $a+b-90^\circ=180^\circ$, deci $a+b=270^\circ$. Avem că $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=m(\sphericalangle DBN)+m(\sphericalangle MBE)=m(\sphericalangle DBE)+m(\sphericalangle MBN)$, de unde $m(\sphericalangle MBN)=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-90^\circ=45^\circ$.................................... **3p**

4. Alina, Bogdan, Claudia, Denisa şi Eugen joacă partide de dublu la ping-pong. În fiecare joc, unul dintre copii stă pe margine, în timp ce ceilalţi patru joacă doi contra celorlalţi doi. Fiecare pereche joacă împotriva fiecăreia din perechile formate din jucătorii rămaşi exact o dată.

a) Câte partide s-au disputat în total?

b) Dacă Alina a câştigat 12 partide, iar Bogdan a câştigat 6 partide, câte partide a câştigat Claudia? Aflaţi toate posibilităţile şi justificaţi răspunsul.

Soluţie:

a) Fiecare jucător stă 3 partide pe margine: de exemplu, când Alina stă pe margine, Bogdan joacă, pe rând, în pereche cu Claudia, Denisa şi Eugen, adică 3 partide.

Prin urmare, fiind 5 copiii dintre care fiecare stă pe margine 3 partide, în total se dispută 15 partide. **2p**
b) Alina a jucat 12 partide, deci ea le-a câştigat pe toate. **1p**
Bogdan a jucat 3 partide în pereche cu Alina (Claudia, Denisa şi Eugen au stat, pe rând, pe margine). Doarece Alina a câştigat toate partidele, rezultă că Bogdan a câştigat aceste 3 partide. În plus, când a jucat contra Alinei el a pierdut, deci celelalte 3 partide câştigate de Bogdan au fost câştigate atunci când Alina a stat pe margine. Aşadar Bogdan a câştigat toate cele 3 partide în care Alina a stat pe margine. **2p**
Claudia a câştigat cele 3 partide în care a avut-o pe Alina drept parteneră şi a pierdut toate partidele în care a jucat contra Alinei. În cele trei partide în care Alina a stat pe margine, Claudia a câştigat când a jucat în pereche cu Bogdan şi a pierdut când a jucat împotriva acestuia. Aşadar Claudia a obţinut 4 victorii (singura posibilitate). **2p**