

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

CLASA A XI-A

- 1.) Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2016 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R}_+)$ pentru care au loc relațiile $A \cdot X = X \cdot A$ și $X^{2016} + X = A$.
- 2.) Fie a, b, c respectiv A, B, C lungimile laturilor, respectiv măsurile unghiurilor unui triunghi. Arătați că:
$$\begin{vmatrix} b \cos C & c \cos B & \sin A \\ c \cos A & a \cos C & \sin B \\ a \cos B & b \cos A & \sin C \end{vmatrix} = 0.$$
- 3.) Se consideră șirul recurent $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru care $a_0 = 2$ și a_{n+1} este egal cu modulul soluțiilor complexe ale ecuației de gradul doi cu coeficienți numere reale $z^2 - a_n z + a_n = 0$.
- a) Determinați în funcție de n formula termenului general al șirului.
- b) Calculați limita șirului $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $b_n = 2^n(a_n - 1)$.
- 4.) Pentru fiecare mulțime din mulțimile $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, se consideră mulțimea $B_n \subset A_n$ după următoarea regulă: pentru orice $x, y \in B_n, x \leq y$ avem $xy \notin B_n$ și B_n conține cele mai multe elemente posibile. Formăm șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_n = |B_n|$ (cardinalul mulțimii B_n), pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Determinați mulțimea B_{2016} și calculați valoarea lui b_{2016} .
- b) Determinați formula termenului general al șirului $(b_n)_{n \geq 1}$ în funcție de n .
- c) Determinați termenul general al șirului $c_n = \frac{\sum_{i=1}^{n^2-1} b_i}{n^4}$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ în cazul în care există, sau arătați că această limită nu există.

Notă:**Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.****Timp de lucru 3 ore.**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A XI-A

1.)	Din oficiu	1p
	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_+)$	1p
	Din $A \cdot X = X \cdot A$ obținem $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$	2p
	Demonstrăm cu inducție matematică că $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$	2p
	Din egalitatea $X^{2016} + X = A$ obținem ecuațiile $a^{2016} + a = 2$ și $2016a^{2015} \cdot b + b = 2016$	2p
	Din ecuația $a^{2016} + a = 2 \Rightarrow a = 1$ singura soluție reală pozitivă și din ecuația $2016a^{2015} \cdot b + b = 2016 \Rightarrow b = \frac{2016}{2017}$ Soluția ecuației este: $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2016}{2017} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p

2.)	Din oficiu	1p
	Aplicând teorema cosinusului avem: $b \cos C + c \cos B = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a$	3p
	Adunăm primele două coloane ale determinantului și obținem: $\begin{vmatrix} b \cos C & b \cos C + c \cos B & \sin A \\ c \cos A & c \cos A + a \cos C & \sin B \\ a \cos B & a \cos B + b \cos A & \sin C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b \cos C & a & \sin A \\ c \cos A & b & \sin B \\ a \cos B & c & \sin C \end{vmatrix}$	2p
	Din teorema sinusurilor rezultă că $\sin A = \frac{a}{2R}$.	2p
	Înlocuind în determinant obținem $\begin{vmatrix} b \cos C & a & \frac{a}{2R} \\ c \cos A & b & \frac{b}{2R} \\ a \cos B & c & \frac{c}{2R} \end{vmatrix} = \frac{1}{2R} \begin{vmatrix} b \cos C & a & a \\ c \cos A & b & b \\ a \cos B & c & c \end{vmatrix} = 0$	2p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN COVASNA

3.)	Din oficiu	1p
	a) Ecuația de gradul doi cu coeficienți numere reale $z^2 - a_n z + a_n = 0$ are soluții numere complex dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n < 0 \Rightarrow a_n \in (0; 4)$	1p
	Fie z_1, z_2 rădăcinile complexe ale ecuației, atunci $ z_1 ^2 = z_2 ^2 = z_1 \cdot z_2$ Deoarece $z_1 \cdot z_2 = a_n$ obținem $a_{n+1} = z_1 = \sqrt{z_1 \cdot z_2} = \sqrt{a_n}$	2p
	Din $a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ și $a_0 = 2$ obținem: $a_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, a_2 = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2^2}}$.	2p
	Presupunem $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$ și calculăm valoarea termenului a_{n+1} . $a_{n+1} = \sqrt{a_n} = \sqrt{2^{\frac{1}{2^n}}} = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Deci termenul general al șirului este: $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}} \forall n \in \mathbb{N}$.	2p
	b.) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(2^{\frac{1}{2^n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \ln 2$	2p

4.)	Din oficiu	1p
	a) Deoarece $\sqrt{2016} = 44, 89\dots$, obținem că pentru elementele mulțimii $B_{2016} = \{45, 46, \dots, 2016\}$ are loc relația $xy \notin B_{2016}, \forall x, y \in B_{2016}, x \leq y$.	2p
	Dacă am completa cu orice alt element x din mulțimea $A_{2016} = \{1, 2, \dots, 2016\}$, elementul $45x$ aparține mulțimii $B_{2016} = \{45, 46, \dots, 2016\}$. Deci numărul elementelor mulțimii B nu poate fi mărit.	1p
	$b_{2016} = B_{2016} = 2016 - 45 + 1 = 1972$	1p
	b) Generalizând rezultatul obținut la punctul a) obținem: $b_n = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.	2p
	c) Deoarece $b_i = i - k$, pentru $\forall i \in \underbrace{\{k^2, k^2 + 1, \dots, (k+1)^2 - 1\}}_{2k+1 \text{ elemente}}$, avem $\sum_{i=1}^{n^2-1} b_i = \sum_{i=1}^{n^2-1} (i - \lfloor \sqrt{i} \rfloor) = \sum_{i=1}^{n^2-1} i - \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = \frac{(n^2-1)n^2}{2} - \left[2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right] =$ $= \frac{3n^4 - 4n^3 + 3n^2}{6}$	2p
	Limita căutată este: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 4n^3 + 3n^2}{6n^4} = \frac{1}{2}$.	1p