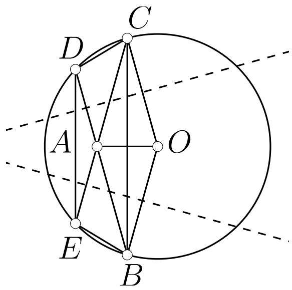
Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Soluţii – clasa a VII-a

Problema 1.

Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi punctul A în interiorul său, $A \neq O$. Mediatoarea segmentului OA intersectează $\mathcal{C}$ în punctele B şi C. Dreptele AB şi AC retaie $\mathcal{C}$ în D, respectiv E. Demonstraţi că cercurile circumscrise triunghiurilor OBC şi ADE sunt concentrice.



Soluţie. Deoarece centrul cercului circumscris unui triunghi este la intersecţia a două mediatoare ale laturilor acestuia, este suficient să arătăm că două mediatoare ale laturilor triunghiului OBC coincid cu două mediatoare ale laturilor triunghiului AED **2p**

Arătăm că segmentele AD şi CO au aceeaşi mediatoare (†); prin simetrie, rezultă că şi segmentele AE şi BO au aceeaşi mediatoare **2p**

Pentru a demonstra (†), arătăm că $AOCD$ este trapez isoscel. Aceasta rezultă din:

- $AC = OC = OB = AB$, deci $ACOB$ este romb, de unde $AD \parallel OC$ **1p**
- $\angle COA = \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mic}}$ şi $\angle OCD = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mare}} = \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mic}}$, deci $\angle AOC \equiv \angle DCO$, ceea ce încheie demonstraţia **2p**

Problema 2.

Determinaţi toate perechile (a, b) de numere reale nenule care verifică relaţia

$$\frac{5-b}{a} = \frac{4-a}{b} = \frac{10}{a^2+b^2}.$$

Soluţie. Din ipoteză şi o proprietate a proporţiilor obţinem

$$\frac{10}{a^2+b^2} = \frac{5-b}{a} = \frac{4-a}{b} = \frac{(5-b)a}{a^2} = \frac{(4-a)b}{b^2} = \frac{(5-b)a+(4-a)b}{a^2+b^2}$$ **1p**

Reiese $10 = 5a + 4b - 2ab$, sau $(a-2)(2b-5) = 0$, de unde $a = 2$ sau $b = \frac{5}{2}$. **2p**

Dacă $a = 2$ rezultă $b(5-b) = 4$, sau $b^2 - 4b - b + 4 = 0$, adică $(b-1)(b-4) = 0$, ceea ce duce la soluţiile $(2, 1)$ şi $(2, 4)$ **2p**

Dacă $b = \frac{5}{2}$ rezultă $a(4-a) = \frac{25}{4}$, sau $a^2 - 4a + 4 + \frac{9}{4} = 0$, adică $(a-2)^2 + \frac{9}{4} = 0$, ecuaţie care nu are soluţii reale **2p**

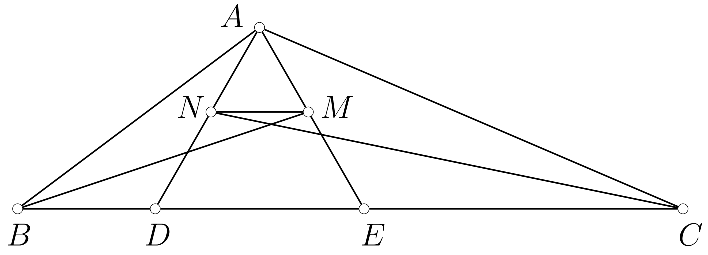
Aşadar, perechile cerute sunt $(2, 1)$ şi $(2, 4)$.

Problema 3.

Considerăm triunghiul neisoscel ABC, cu $\angle BAC > 90^\circ$. Pe latura BC a triunghiului luăm punctele D şi E, astfel încât $\angle BAD \equiv \angle ACB$ şi $\angle CAE \equiv \angle ABC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie AE în M, iar bisectoarea unghiului $\angle ACB$ taie AD în N. Ştim că $MN \parallel BC$.

Determinaţi măsura unghiului dreptelor BM şi CN.

Soluţie. Folosind proprietatea unghiului exterior pentru triunghiul delimitat de BM, CN şi BC, unghiul dreptelor BM şi CN are măsura $\angle NCB + \angle MBC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$ **1p**



Din teorema lui Thales şi teorema bisectoarei obţinem şirul de egalităţi $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{NA}{ND} = \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{AB}{BE}$, de unde $AC \cdot BE = CD \cdot AB$. (††) **2p**

Apoi $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (UU), deci $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{BD}{AB}$, de unde $BD = \dfrac{AB^2}{BC}$. Analog obţinem $CE = \dfrac{AC^2}{BC}$ **1p**

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Din (††), $b\big(a - \frac{b^2}{a}\big) = c\big(a - \frac{c^2}{a}\big)$. Aceasta duce la $a^2(b-c) = b^3 - c^3$, sau $a^2(b-c) = (b-c)(b^2+bc+c^2)$ şi, cum $b - c \neq 0$, rezultă $a^2 = b^2 + bc + c^2$ **2p**

Conform teoremei cosinusului, aceasta arată că $\angle BAC = 120^\circ$, deci unghiul dreptelor BM şi CN are măsura 30° **1p**

Problema 4.

Determinaţi cel mai mic număr natural n pentru care numărul

$$\sqrt{(6n+11)(6n+14)(20n+19)}$$

este raţional.

Soluţie. Pentru ca numărul în cauză să fie raţional, este necesar şi suficient ca numărul $N = (6n+11)(6n+14)(20n+19)$ să fie pătrat perfect. Numerele naturale pot fi de forma $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_6 \pm 1$, $\mathcal{M}_6 \pm 2$, $\mathcal{M}_6 + 3$. Astfel, pătratele lor pot fi de forma $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_6 + 1$, $\mathcal{M}_6 + 4$, $\mathcal{M}_6 + 3$. Rezultă că $A = 6n + 11 = \mathcal{M}_6 + 5$ şi $B = 6n + 14 = \mathcal{M}_6 + 2$ nu pot fi pătrate perfecte pentru niciun număr natural n.
.... **1p**

De aici reiese că A şi B au în descompunerea lor cel puţin un factor prim la o putere impară; acest factor prim trebuie să apară la una dintre celelalte paranteze.
.... **1p**

Dacă $p \mid A$ şi $p \mid B$, atunci $p \mid B - A = 3$. Dar $3 \nmid A$, deci A şi B nu au factori primi comuni.

Dacă $p \mid A$ şi $p \mid C = 20n + 19$, atunci $p \mid 10A - 3C = 53$, iar dacă $p \mid B$ şi $p \mid C$, atunci $p \mid 10B - 3C = 83$. Astfel, pentru ca N să poată fi pătrat perfect, este necesar ca numărul C să fie divizibil cu $83 \cdot 53$ **3p**

Cel mai mic n pentru care se poate întâmpla acest lucru corespunde situaţiei $20n + 19 = 83 \cdot 53$, adică $n = 219$ **1p**

Pentru $n = 219$ avem $N = (53 \cdot 25) \cdot (83 \cdot 16) \cdot (53 \cdot 83) = 83^2 \cdot 53^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$, deci $n = 219$ convine. Aşadar, numărul cerut este 219 .... **1p**

Observaţie. Deoarece nici $C = \mathcal{M}_4 + 3$ nu este pătrat perfect pentru nicio valoare a lui n, raţionamentul decurge la fel dacă pornim de la oricare doi dintre cei trei factori ai lui N.