Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală - Maramureş

Clasa a X-a

|  |  |
| --- | --- |
|  | **1.** Fie cu cel puțin două elemente și funcția  astfel încât , . |
| *2 p* | **a)**  Să se demonstreze că  nu poate fi strict descrescătoare. |
| *2 p* | **b)** Dacă , să se arate că există o infinitate de funcții bijective care verifică relația din enunț. |
| *3 p* | **c)** Să se determine, dacă  este finită. |
|  |  |
| *7 p* | **2.** Să se arate că  |
|  | *Traian Covaciu* |
|  |  |
|  | **3.** Să se demonstreze că dacă , atunci există o infinitate de perechi de numere reale strict  pozitive  astfel încât: |
| *3 p* | **a)** . |
| *4 p* | **b)** . |
|  | *Dana Heuberger* |
|  |  |
| *7 p* | **4.** Fie  și  centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul triunghiului . Demonstrați că dacă  și , atunci . |
|  | *Lucian Dragomir, S.L14.337, G.M. 12 / 2014* |

*Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

*Subiecte selectate şi prelucrate de:*

*Dana Heuberger, C.N. „Gheorghe Șincai” Baia Mare*

*Traian Covaciu, C. N. „Vasile Lucaciu” Baia Mare*

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală – Maramureş, Clasa a X-a

**Soluții**

**1.** **a)** Presupunem că  poate fi strict descrescătoare. Atunci,  este strict crescătoare, iar funcția

,  este strict descrescătoare, contradicție.

**b)** De exemplu, funcțiile ,  sunt soluții.

**c)** Fie  și , cu .

Se arată ușor că  este injectivă.

Mulțimea  fiind finită, rezultă că  este și surjectivă. Așadar există  astfel încât . Atunci, , de unde rezultă că .

Dar , deci, adică . Deoarece , raționând la fel obținem că . Inductiv, rezultă că , , deci singura soluție este funcția .

**2.** 

.

Dar 

**3.** Condiții de existență: .

**a)**  și orice pereche , cu  este soluție.

**b)** Alegem , cu . Obținem  și apoi

  

Fie , , .

Deoarece  este strict descrescătoare și  este strict crescătoare, ecuația  are cel mult o soluție.

 **I.** .  și   ecuația are o unică soluție, , care aparține intervalului .

**II.** .  și   ecuația are o unică soluție, , care aparține intervalului .

**4.** Alegem un reper cartezian cu centrul în  și notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă.

Avem , , unde astfel încât  e un paralelogram, cu .

Din ipoteză, , unde  este raza cercului , circumscris triunghiului .

Așadar , deci , iar  este un romb.

Deoarece , rezultă că . Analog, din  deducem că , deci triunghiul  este echilateral. Rezultă că , deci .

Obținem .