OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I: Fie numărul $A = \frac{5^{2n}+5^{n+2}+114}{4\cdot 5^n+24}$, n-număr natural.

a. Să se arate că: $A = \frac{5^n+19}{4}$

b. Să se arate că $A \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL II: Determinați numerele prime a, b, c pentru care:

$$15a + 35b + 91c = 2015$$

SUBIECTUL III: Se consideră punctele distincte A, B, C, D astfel încât B este mijlocul lui (AC) și C este mijlocul segmentului (BD). Să se arate că:

$$a. BC = \frac{AC+BD}{4} \qquad b. \frac{1}{AC} + \frac{1}{BD} < \frac{4}{AD}$$

SUBIECTUL IV: Pe dreapta d se consideră punctele $A_0, A_1, \dots, A_{50}$, în această ordine, astfel încât $A_0A_1 = 1$ cm, $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 5$ cm, ..., $A_{49}A_{50} = 99$ cm. Fie O mijlocul segmentului $[A_0A_{50}]$.

a. Determinați $p \in \mathbb{N}$ pentru care $O \in [A_pA_{p+1}]$

b. Există două numere naturale m și n, $0 < m < n < 50$ astfel încât punctul O să fie mijlocul segmentului $[A_mA_n]$?

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 2 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-21 FEBRUARIE 2016
Clasa a VI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem .**

SUBIECTUL I

a. $\frac{5^{2n}+5^{n+2}+114}{4\cdot 5^n+24}=\frac{5^{2n}+5^n\cdot 5^2+114}{4\cdot 5^n+24}=$ $=\frac{5^{2n}+5^n(6+19)+114}{4\cdot 5^n+24}=\frac{5^{2n}+5^n\cdot 6+5^n\cdot 19+114}{4\cdot 5^n+24}=$	2p
$=\frac{5^n(5^n+6)+19(5^n+6)}{4(5^n+6)}=\frac{(5^n+6)(5^n+19)}{4\cdot(5^n+6)}=\frac{5^n+19}{4}$	2p
b. $5^n+19=(4+1)^n+19=M4+1+19=M_4+20=M_4$	2p
Rezultă $4 \mid 5^n+19 \Rightarrow \frac{5^n+19}{4}\in\mathbb{N}$	1p

SUBIECTUL II

$5\mid 15a; 5\mid 35b; 5\mid 2015$ Rezultă $5\mid 91c$ de unde $c=5$	2p
$15a+35b+455=2015$ $15a+35b=1560$ $3a+7b=312$	2p
Dar $3\mid 3a; 3\mid 312$. Rezultă $3\mid 7b \Rightarrow b=3, 3a+21=312$, $3a=291$ $a=97$	3p

SUBIECTUL III

$a. BD=2BC \Rightarrow \frac{AC+BD}{4}=\frac{2BC+2BC}{4}=BC$	3p
$b. \frac{1}{AC}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{2BC}+\frac{1}{2BC}=\frac{1}{BC}$ (1)	2p
$\frac{4}{AD}=\frac{4}{3BC}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{BC}$ (2)	2p
Din (1),(2) $\Rightarrow \frac{1}{BC}<\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{BC}\Rightarrow\frac{1}{AC}+\frac{1}{BD}<\frac{4}{AD}$	1p

SUBIECTUL IV

a. $A_0A_p=p^2 \Rightarrow A_0A_{50}=1+3+5+\cdots+99=50^2=2500$	1p
O − mijlocul lui $[A_0A_{50}] \Rightarrow A_0O=1250$	1p
$O\in[A_pA_{p+1}] \Leftrightarrow p^2<1250<(p+1)^2 \Rightarrow p=35 \Rightarrow O\in[A_{35}A_{36}]$	1p
b. O − mijlocul lui $[A_mA_n]$ dacă $A_mO=OA_n$	
$\left.\begin{matrix}A_mO=1250-m^2\\ OA_n=n^2-1250\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1250-m^2=n^2-1250$	2p
$\Rightarrow n^2+m^2=2500, n^2+m^2=25\cdot 100=16\cdot 100+9\cdot 100=40^2+30^2$	1p
$\Rightarrow O$ este mijlocul segmentului $[A_{30}A_{40}]$	1p