OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

15 februarie 2015

CLASA a V – a

1. a) **(3p)** Calculaţi: $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$.
b) **(4p)** Arătaţi că numărul 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.

2. Se consideră mulţimea $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots , 2^{99}\}$, suma $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}$ şi mulţimea B formată din numere care se pot scrie ca sumă de elemente diferite din mulţimea A.
a) **(1p)** Determinaţi numărul de elemente din mulţimea A.
b) **(2p)** Arătaţi ca $2015 \in B$.
c) **(3p)** Arătaţi că $2S = 2 + 2^2 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ şi calculaţi S.
d) **(1p)** Justificaţi că $2^{100} \notin B$.

3. Fie numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_{2015}$, care împărţite la un număr natural nenul *n*, dau resturi diferite două câte două şi câturi nenule, diferite două câte două.
a) **(3p)** Arătaţi că *n* este mai mare ca 2014.
b) **(4p)** Dacă S este cea mai mică valoare a sumei $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$, arătaţi că $2\cdot(S - 2015^2)$ se poate scrie ca un produs de trei numere naturale consecutive.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 2 ore.