OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014
CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Fie multimea

$$K = \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ b & 2b & b \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}; a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Atunci $(K,+,\cdot)$ este corp.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și funcția $f: G \to G$, $f(x) = x^2$.
a) Să se demonstreze că f este endomorfism al grupului G dacă și numai dacă $(G, \cdot)$ este grup abelian.
b) Dacă grupul G este comutativ și are un număr impar de elemente, să se demonstreze că functia f este un automorfism al grupului G.

PROBLEMA 3. Fie sirul de termen general

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x\right)dx, n \ge 1.$$

Sa se calculeze $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n^2]{nI_n} - 1\right)$.

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:
i) f este crescătoare;
ii) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F(0) = 0$ şi $F(x + y) \le F(x) + F(y)$, $\forall x, y \in [0, \infty)$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu puncte de la 0 la 7.

Barem clasa a XII-a

Problema 1.

Verificarea axiomelor .(7p)

Problema 2.

a) Dacă f este endomorfim al grupului G, atunci $f(xy)=f(x)f(y), \forall x,y\in G$.
Atunci $(xy)^2=x^2y^2$, $\forall x,y\in G$, adică $xyxy=xxyy$, $\forall x,y\in G$. Simplificând la stânga prin x și la dreapta
prin y obținem $yx=xy$, $\forall x,y\in G$, deci $(G,\cdot)$ este grup abelian. **(2 puncte)**
Dacă $(G,\cdot)$ este grup abelian, atunci $\forall x,y\in G$ avem
$f(xy)=(xy)^2=xyxy=xxyy=x^2y^2=f(x)f(y)$, adică f este endomorfim al grupului G. **(1 punct)**
b) Fie $(G,\cdot)$ un grup comutativ cu $2n+1$ elemente $(n\in\mathbb{N})$. Dacă e este elementul neutru al grupului, atunci $x^{2n+1}=e$, $\forall x\in G$. **(1 punct)**
Dacă $a,b\in G$ și $f(a)=f(b)\Rightarrow a^2=b^2\Rightarrow a^{2n}=b^{2n}$. *Dar* $a^{2n+1}=b^{2n+1}\Rightarrow a^{2n}a=b^{2n}b\Rightarrow a=b$, prin urmare f este injectivă. **(1 punct)**
Deoarece f este injectivă și G este mulțime finită, rezultă că f este bijectivă. **(1 punct)**
Cum $(G,\cdot)$ este grup abelian, conform a) rezultă că f este endomorfim al grupului G.
În concluzie, f este automorfism al grupului G. **(1 punct)**

Problema 3.

Avem $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}tg^{n-1}x\left(1+tg^2x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}tg^nxdx=I_1+I_2$. Prima integrala devine prin integrare prin parti $I_1=e^{nx}\left(\frac{1}{n}tg^nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_2=\frac{1}{n}e^{\frac{n\pi}{4}}-I_2\,(3p)$. De aici $nI_n=e^{\frac{n\pi}{4}}$ si limita de calculat se scrie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{4n}}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}(4p)$.

Problema 4

Pentru $x=y>0$ obţinem $F(2x)\le 2F(x)\Rightarrow F(2x)-F(x)\le F(x)$. Din teorema lui Lagrange rezultă că există $c_x\in(x,2x)$ astfel încât $xf(c_x)\le F(x)$. Deoarece f este crescătoare,
avem $f(x)\le f(c_x)$, deci $xf(x)\le F(x)$. În continuare deducem $\frac{xf(x)-F(x)}{x^2}\le 0$,

adica $\left(\frac{F(x)}{x}\right)' \leq 0, \forall x \in (0,\infty)$ de unde rezulta ca functia $\frac{F(x)}{x}$

este descrescătoare pe $(0,\infty)$. **(4 puncte)**

Cum *f* este crescătoare rezultă că *F* este convexă şi cum $F(0) = 0$ deducem că funcţia $\frac{F(x)}{x}$ este crescătoare pe $(0,\infty)$, prin urmare $\frac{F(x)}{x}$ este constanta pe $(0,\infty)$.

Avem $F(x) = kx \Rightarrow f(x) = k$, $\forall x \in (0,\infty)$. Cum *f* are primitive rezultă că *f* are proprietatea lui Darboux, deci $f(x) = k, \forall x \in [0,\infty)$.(3puncte)

A doua soluţie. Deoarece *f* are primitive rezultă că *f* are proprietatea lui Darboux şi cum *f* este monotonă deducem că *f* este continuă. Atunci $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. (1p)

Fie $x, y \in [0,\infty)$ .Inegalitatea din enunt se poate scrie

$$F(x+y) - F(x) \leq F(y) \Rightarrow \int_x^{x+y} f(t)dt \leq \int_0^y f(t)dt.$$

Cu schimbarea de variabila u=t-x avem $\int_x^{x+y} f(t)dt = \int_0^y f(x+u)du$ si inegalitatea precedent devine

$$\int_0^y \left(f(t+x) - f(t)\right)dt \leq 0. \textbf{(2p)}$$

Dar *f* crescătoare şi $t \leq t+x$ implică $f(t+x) - f(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, y]$, deci

$\int_0^y \left(f(t+x) - f(t)\right)dt \geq 0.$ **(2 puncte)**

Atunci $\int_0^y (f(t+x) - f(t))dt = 0$ şi cum funcţia de sub integrală este continuă şi pozitivă,

rezultă că $f(t+x) - f(t) = 0$, $\forall t \in [0, y]$. Pentru $t = 0$ obţinem $f(x) = f(0)$ şi cum x a fost ales arbitrar, deduce ca f este functia constanta.

Se verifică imediat că funcţiile constante verifică cerinţele problemei. **(2 puncte)**