Olimpiada de matematică
Etapa locală, 21.02.2016
Clasa a X- a

Subiecte :

1. Arătați că numerele $a, b, c \in (1, \infty)$ verifică relația

$$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{a+c}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3 \ .$$

2. Fie $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Arătați că :

a) $|u - z| = |1 - \bar{u}\, z|$, pentru orice $u \in \mathbb{C}$.

b) $|1 + z| + |1 + z^2| \geq |1 - z|$.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x\sqrt{2}] - [x]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a .
a) Să se calculeze $f(\sqrt{2}\,)$.
b) Să se arate că f nu este injectivă.
c) Să se arate că f este surjectivă.

4. Fie $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ și $u = z + z^2 + z^4, v = z^3 + z^5 + z^6$.
a) Să se calculeze z^7.
b) Să se arate că $u + v = -1$.
c) Să se arate că $uv = 2$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.Timp de lucru : 3 ore .
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Barem cls. a X-a

Notă. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim din barem pentru enunțul respectiv .

1. Folosind inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ rezultă $\log_a \frac{b+c}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c)$

……………………………………………………………………………………..2 p

Scriind celelalte două inegalități , adunându-le și folosind inegalitatea
$\log_b a + +\log_a b \geq 2$ rezultă

$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{a+c}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a +$
$+\log_a c) \geq 3$. ……………………………………………………………….5 p

2. a) $|u - z| = |z - u| = |\overline{z - u}| = |\bar{z} - \bar{u}| = \left|\frac{1}{z} - \bar{u}\right| = \left|\frac{1 - z\bar{u}}{z}\right| = \frac{|1 - z\bar{u}|}{|z|} =$
$|1 - z\bar{u}|$, unde am folosit că $z\bar{z} = |z|^2 = 1$ ……………………………….4 p

b) Folosind inegalitatea $|a - b| \leq |a| + |b|, |1 + z| + |1 + z^2| \geq$
$\geq |(1 + z) - (1 + z^2)| = |z - z^2| \geq |z(1 - z)| = |z| \cdot |1 - z| = |1 - z|$…...3 p

3. a) $f(\sqrt{2}) = 2 - [\sqrt{2}] = 1$ ……………………………………………………… 2 p

b) De exemplu, $f(\sqrt{3}) = [\sqrt{6}] - [\sqrt{3}] = 2 - 1 = 1$ și $f(\sqrt{2}) = f(\sqrt{3})$…….3 p

c) Pentru $n \in \mathbb{Z}, f(x) = n \Leftrightarrow [x\sqrt{2}] = [x] + n = [x + n]$. Pentru $x\sqrt{2} = x + n$ se verifică, adică $x(\sqrt{2} - 1) = n$ și $x = \frac{n}{\sqrt{2}-1} = n(\sqrt{2} + 1)$…………………...2 p

4.a) $z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$……………………………………………...2 p

b) $z^7 - 1 = 0, (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0, z \neq 1$, deci
$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, sau $u + v + 1 = 0$………………...3 p

c) $uv = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$ și din $z^7 = 1$ rezultă
$uv = z^4 + z^5 + z^6 + 3 + z + z^2 + z^3 = u + v + 3 = -1 + 3 = 2$……….2 p

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro

Str. Carpați nr.15, 140059, Alexandria
Tel: +40 (0)247 31 27 12
Fax: +40 (0)247 31 70 92
E-mail: isjteleo@yahoo.com isjteleo@isjtr.ro
Web site: www.isjtr.ro