Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a XII-a - Soluţii şi barem

1. *Fie A un inel finit şi $a, b \in A$ cu proprietatea că $(ab-1)b = 0$. Arătaţi că $b(ab-1) = 0$.*
Soluţie:
Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu $ab^2 = b$, iar cea de demonstrat cu $bab = b$.
Dacă elementul b este idempotent(i.e., $b^2 = b$), atunci $bab = bab^2 = b \cdot b = b^2 = b$.
Dacă $b^m = b$, cu $m > 2$, atunci $bab = bab^m = bab^2b^{m-2} = b \cdot b \cdot b^{m-2} = b^m = b$.
.... **2p**
Este suficient să arătăm că există $m \geq 2$ cu proprietatea că $b^m = b$. **1p**
Inelul A fiind finit, există $1 \leq k < m$ numere naturale, cu k minim, cu proprietatea că $b^k = b^m$. **1p**
Arătăm că $k = 1$.
Dacă $k > 1$, atunci $ab^k = ab^m = ab^2b^{m-2} = b^{m-1}$. **1p**
Dacă $k = 2$, rezultă că $b = ab^2 = b^{m-1}$, contrazicând minimalitatea. **1p**
Dacă $k > 2$, atunci $b^{k-1} = b \cdot b^{k-2} = ab^2b^{k-2} = ab^k = b^{m-1}$, contrazicând de asemenea minimalitatea. **1p**
Observaţie: Nu se acordă puncte pentru discutarea cazului unui inel comutativ.

2. *Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiţia*

$$e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1\,,$$

pentru orice x număr real. Determinaţi valoarea minimă pe care o poate lua integrala

$$I(f) = \int_0^e f(x)\,dx\,,$$

atunci când f parcurge $\mathcal{F}$.

Soluţie:
Vom arăta că valoarea minimă este $\frac{3}{2}$.
Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 1$.
Aceasta este strict crescătoare şi continuă, cu $Im(g) = \mathbb{R}$, deci inversabilă,. **1p**
cu inversa de asemenea continuă şi strict crescătoare. **1p**
Inegalitatea din enunţ se scrie sub forma $g(f(x)) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde

$f(x) \geq g^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$. **1p**
Cum $g^{-1} \in \mathcal{F}$, şi $I(f) \geq I\left(g^{-1}\right), \forall f \in \mathcal{F}$, valoarea minimă este $I\left(g^{-1}\right)$. **2p**
Cu substituţia $t = g^{-1}(x)$, avem

$$I\left(g^{-1}\right) = \int_0^e g^{-1}(x)\,dx = \int_0^1 tg'(t)\,dt = \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

. . . . **2p**
Observaţie: Ultimul calcul reface demonstraţia teoremei lui Young, care se poate de asemenea invoca pentru obţinerea concluziei.

3. *Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*
a) Dacă $A = \{m \cdot a_n | \, m, n \in \mathbb{N}^*\}$, arătaţi că orice interval deschis de numere strict pozitive conţine elemente din A.
b) Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = a_n$ are loc inegalitatea $\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x - y|$, arătaţi că:

$$\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Soluţie:
a) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pentru orice $c, d > 0$, cu $c < d$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n < d - c$. Pentru $m = \lfloor \frac{c}{a_n} \rfloor + 1$ rezultă atunci că $m \cdot a_n \in (c, d) \cap A$. **1p**
b) Funcţia f fiind integrabilă, este marginită. Fie $M > 0$, cu $Im(f) \subseteq [-M, M]$.
Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixate şi $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = m \cdot a_n$. Arătăm că

$$\left|\int\limits_x^y f(t)\,dt\right| \leq |x-y|.$$

Definim, pentru $k = \overline{0, m}$, numerele $z_k \in [a, b]$ prin

$$z_k = x + \frac{k}{m} \cdot (y - x) = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \cdot x + \frac{k}{m} \cdot y.$$

Rezultă că $|z_k - z_{k-1}| = a_n$, pentru orice $k = \overline{1, m}$, şi

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_{z_0}^{z_m} f(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,dt\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t)\,dt\right| \le \sum_{k=1}^{m}|z_k - z_{k-1}| = |x-y|.$$

.... **2p**

Fie acum $x, y \in [a, b]$ oarecare şi $d = |x - y|$. Pentru $d = 0$, inegalitatea cerută este evidentă. Presupunem în continuare $d > 0$. Cum A este densă în $[0, \infty)$, există un şir $(d_n)_{n\ge 1} \subset A$ cu proprietatea că $d_n \nearrow d$. Considerăm

$$y_n = x + \frac{d_n}{d}\cdot(y - x) = \left(1 - \frac{d_n}{d}\right)\cdot x + \frac{d_n}{d}\cdot y.$$

Atunci $y_n \in [a, b]$, $|y_n - x| \in A$ şi $y_n \to y$. **2p**

Rezultă că

$$\left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le M\cdot|y - y_n| \longrightarrow 0.$$

.... **1p**

Obţinem atunci că

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^{y_n} f(t)\,dt + \int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le \left|\int_x^{y_n} f(t)\,dt\right| + \left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right| \le |x - y_n| + \left|\int_{y_n}^{y} f(t)\,dt\right|.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obţinem inegalitatea cerută.

.... **1p**

4. *Pentru $k \in \mathbb{Z}$ definim polinomul $F_k = X^4 + 2(1-k)X^2 + (1+k)^2$. Să se determine toate valorile $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât F_k să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}$ şi reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ pentru orice p prim.*

Soluţie:

Vom arăta că numerele care satisfac condiţia cerută sunt toate numerele $k \in \mathbb{Z}$ care nu sunt de forma $\pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă F_k se descompune ca produs de două polinoame monice de grad 2.

Într-adevăr, dacă F_k are o rădăcină întreagă m, atunci

a) dacă $m = 0$, atunci $k = -1$, şi $F_{-1} = X^2(X^2 + 4)$.

b) dacă $m \ne 0$, atunci $-m$ este de asemenea rădăcină, şi $X^2 - m^2$ divide F_k.

. . . . **1p**

Deci F_k este reductibil peste Z dacă şi numai dacă $F_k = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Prin identificarea coeficienţilor, avem că $a + c = 0$, $ac + b + d = 2(1 - k)$, $ad + bc = 0$ şi $bd = (1 + k)^2$.

Dacă $a = 0$, atunci $c = 0$, $b + d = 2(1 - k)$, $bd = (1 + k)^2$, de unde obţinem $(b - d)^2 = 4(1 - k)^2 - 4(1 + k)^2 = -16k$, astfel că $k = -l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $c = -a$, $b = d$, $b^2 = (1 + k)^2$, $2b - a^2 = 2(1 - k)$.

Dacă $b = -1 - k$, rezultă $a^2 = -4$, imposibil. Deci $b = 1 + k$ şi $a^2 = 4k$, de unde $k = l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $k = \pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$. **2p**

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ cu p prim, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $p = 2$ avem că $F_k = X^4$ sau $F_k = X^4 + \hat{1} = (X + \hat{1})^4$, deci F_k este reductibil. . **1p**

Fie p număr prim impar. Putem presupune că $k \not\equiv 0 \pmod p$ şi $k \not\equiv -1 \pmod p$.

Ca mai sus, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă $F_k = (X^2 + \hat{a}X + \hat{b})(X^2 + \hat{c}X + \hat{d})$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, care verifică condiţiile $a + c \equiv 0 \pmod p$, $ac + b + d \equiv 2(1 - k) \pmod p$, $ad + bc \equiv 0 \pmod p$ şi $bd \equiv (1 + k)^2 \pmod p$.

Dacă $a \equiv 0 \pmod p$, avem că $c \equiv 0 \pmod p$ şi $(b - d)^2 \equiv -16k \pmod p$.**(1)**

Dacă $a \not\equiv 0 \pmod p$, atunci $c \equiv -a \pmod p$, $b \equiv d \pmod p$, $b^2 \equiv (1 + k)^2 \pmod p$ şi $2b - a^2 \equiv 2(1 - k) \pmod p$.

Pentru $b \equiv -1 - k \pmod p$ avem că $a^2 \equiv -4 \pmod p$.**(2)**

Pentru $b \equiv 1 + k \pmod p$ avem că $a^2 \equiv 4k \pmod p$.**(3)**

. . . . **1p**

Cum $-16k = -4 \cdot 4k$, cel puţin unul dintre elementele $-\widehat{16k}$, $-\hat{4}$ şi $\widehat{4k}$ este rest pătratic modulo p, astfel că cel puţin una dintre ecuaţiile (1), (2) sau (3) are soluţii. **1p**

Cum $F_k = (X^2 + (1 - k))^2 - (-16k) = (X^2 - (1 + k))^2 - (-4)X^2 = (X^2 + (1 + k)) - (4k)X^2$, rezultă că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. **1p**