OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025
Soluţii

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale nenule a, b, c, d, astfel încât a, b şi c sunt direct proporţionale cu 5, 6 şi 8, iar c şi d sunt invers proporţinale cu 0,25 şi 0,1(6).

   (a) Ce procent reprezintă b din d?

   (b) Determinaţi numerele a, b, c şi d ştiind că $a+2b+2c+4d=2025$.

Mihaela Sintea

Soluţie.

(a) Conform ipotezei, $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{8}$ şi $0,25\cdot c=0,1(6)\cdot d$ .... **...2p**
Obţinem
$\frac{c}{4}=\frac{d}{6}$. Atunci $\frac{b}{6}=\frac{c}{8}=\frac{d}{12}$. Rezultă $b=\frac{d}{2}$, deci b este 50% din d .... **...2p**

(b) Avem $\frac{a}{5}=\frac{b}{6}=\frac{c}{8}=\frac{d}{12}=\frac{a+2b+2c+4d}{5+2\cdot 6+2\cdot 8+4\cdot 12}=\frac{2025}{81}=25$ .... **...2p**
Obţinem
$a=125,\ b=150,\ c=200,\ d=300$... **...1p**

2. Fie mulţimile $A=\{x|\ x=2^n;\ n\in\mathbb{N};\ 10\le n<25\}$ şi $B=\{y|\ y=2^m;\ m\in\mathbb{N};\ 19<m<30\}$.

   (a) Determinaţi mulţimea $A\cap B$.

   (b) Comparaţi suma elementelor mulţimii A cu suma elementelor mulţimii B.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii (enunţ modificat)

Soluţie.

(a) $A\cap B=\{2^n|\ 20\le n\le 24\}=\{2^{20},2^{21},\ldots,2^{24}\}$ .... **...2p**

(b) Notăm S_A şi S_B sumele elementelor lui A şi B.
Avem $S_B-S_A=\underbrace{\left(2^{25}+2^{26}+\ldots+2^{29}\right)}_{\text{5 termeni}}-\underbrace{\left(2^{10}+2^{11}+\ldots+2^{19}\right)}_{\text{10 termeni}}>5\cdot 2^{25}-10\cdot 2^{19}$. . . **...3p**
Din $5\cdot 2^{25}-10\cdot 2^{19}=5\cdot 2^{20}\left(2^5-1\right)>0$, rezultă $S_B-S_A>0$, deci $S_A<S_B$ .... **...2p**

Observaţie. Se poate utiliza identitatea $2^k+2^{k+1}+\ldots+2^{k+n}=2^k\left(2^{n+1}-1\right),\ k,n\in\mathbb{N}$.

3. Fie punctele S, O, P, coliniare, în această ordine. Se consideră Q şi R două puncte situate în acelaşi semiplan determinat de dreapta SP. Numerele naturale prime a, b, c verifică relaţiile: (a) $a \cdot \widehat{QOR} = b \cdot \widehat{POQ}$, (b) $b \cdot \widehat{ROS} = c \cdot \widehat{QOR}$, (c) $2a + 8b + 12c = 64$.

   (a) Determinaţi numerele prime a, b, c.

   (b) Demonstraţi că semidreapta $(OR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{SOQ}$ şi OR este perpendiculară pe OE, unde semidreapta $(OE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{POQ}$.

Doina Păun

Soluţie.

(a) $a + 4b + 6c = 32$, cu a, b, c numere prime, implică a par, deci $a = 2$ **1p**
Rezultă $2b + 3c = 15$. Cum $3c$ şi 15 sunt divizibile cu 3, rezultă b divizibil cu 3, deci $b = 3$. Obţinem $c = 3$ **2p**

(b) Notăm $\widehat{POQ} = x$, $\widehat{QOR} = y$, $\widehat{ROS} = z$. Conform ipotezei, $2y = 3x$ şi $3z = 3y$.
Din $y = z$ rezultă că semidreapta $(OR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{SOQ}$ **1p**
Avem $x + y + z = 180°$, deci $3 \cdot 180° = 3x + 3y + 3z = 8y$. Rezultă $y = \frac{3}{8} \cdot 180° = 67°30'$.
Atunci $x = 180° - (y + z) = 180° - 135° = 45°$. **2p**
$\widehat{ROE} = \widehat{ROQ} + \widehat{EOQ} = y + \frac{x}{2} = 90°$, deci $OR \perp OE$ **1p**

4. Punctele A_1, A_2, ..., A_8 sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O, astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_8A_1}$ sunt direct proporţionale cu 1,2,...,8.

   (a) Determinaţi măsurile arcelor $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_8A_1}$.

   (b) Demonstraţi că punctele A_3 şi A_7 sunt diametral opuse.

   (c) Dacă punctul M este mijlocul lui $\overset{\frown}{A_4A_5}$ şi N este simetricul punctului A_2 faţă de punctul O, calculaţi măsura unghiului $\widehat{MON}$.

Rodica Cocalea

Soluţie.

(a) Avem $\frac{\overset{\frown}{A_1A_2}}{1} = \frac{\overset{\frown}{A_2A_3}}{2} = \ldots = \frac{\overset{\frown}{A_8A_1}}{8} = \frac{\overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \ldots + \overset{\frown}{A_8A_1}}{1 + 2 + \ldots + 8} = \frac{360°}{36} = 10°$ **2p**
Rezultă $\overset{\frown}{A_1A_2} = 10°$, $\overset{\frown}{A_2A_3} = 20°$, ..., $\overset{\frown}{A_8A_1} = 80°$ **1p**

(b) $\overset{\frown}{A_3A_7} = \overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4A_5} + \overset{\frown}{A_5A_6} + \overset{\frown}{A_6A_7} = 30° + 40° + 50° + 60° = 180°$, deci punctele A_3 şi A_7 sunt diametral opuse **1p**

(c) Cum M mijlocul $\overset{\frown}{A_4A_5}$, avem $\overset{\frown}{A_4M} = \frac{\overset{\frown}{A_4A_5}}{2} = 20°$ **1p**
A_2N diametru, deci $\overset{\frown}{A_2N} = 180°$ **1p**
$\widehat{MON} = \overset{\frown}{MN} = 180° - \overset{\frown}{A_2M} = 180° - (\overset{\frown}{A_2A_3} + \overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4M}) = 110°$ **1p**