1 a) $S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$

$S=\frac{30}{60}+\frac{10}{60}+\frac{5}{60}+\frac{3}{60}=\frac{48}{60}=\frac{4}{5}$..$2p$

b)

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+...+\frac{1}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1+2)}+\frac{1}{2(1+2+3)}+...+\frac{1}{2(1+2+3+...+n)}=$

$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=$...$2p$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$...$2p$

$n=1\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$n=2\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}=\frac{2}{3}$

$n=3\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}=\frac{3}{4}$

....

$n=2012\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+...+\frac{1}{2+4+6+...+4024}=\frac{2012}{2013}$

rezultă $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2011}{2012}\cdot\frac{2012}{2013}=\frac{1}{2013}$...$1p$

2. a) $n=a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+a\cdot 10+b=10^4(10a+b)+10^2(10c+d)+10a+b=10^4(10a+b)+2\cdot 10^2(10a+b)+10a+b=(10a+b)(10^4+2\cdot 10^2+1)=\overline{ab}\cdot 10201=\overline{ab}\cdot 101^2$ ……………………………………………..4p

Deci n este divizibil cu 101. ……………………………………………………

b) $\overline{ab}\cdot 101^2$ pătrat perfect $\Leftrightarrow$ $\overline{ab}$ pătrat perfect (deoarece 101 este număr prim) …….2p

deci $\overline{ab}\in\{16,25,36,49,64,81\}$. Dar din $\overline{cd}=2\overline{ab}$ deducem $10\le\overline{ab}<50$ deci $\overline{ab}\in\{16,25,36,49\}$ deci există patru numere pătrate perfecte cu proprietățile din enunț.
……………………………………………… 1p

3.a) $\overline{aaa}=111a=37\cdot 3a$ ……………………………………………………2p

b) Avem $1+2+3+.....+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ si $\overline{aaa}=111\cdot a=3\cdot 37\cdot a$, deci egalitatea din enunț se scrie

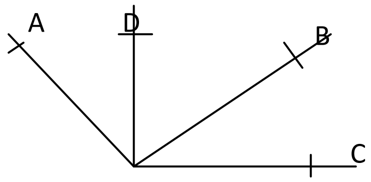
Barem clasa a VI-a

$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=3\cdot 37\cdot a \Leftrightarrow n\cdot(n+1)=6\cdot a\cdot 37$. Întrucât numarul 37 este prim, el divide pe n sau pe $n+1$ deci $n \geq 36$ .Pentru $n = 36$ rezultă $a = 6$, iar $n = 37$ nu verifică……………………………3p

Deoarece 37 divide pe n sau pe $n+1$ următorul caz ar fi $n = 73$ sau 74, dar
$6a \cdot 37 \leq 6 \cdot 9 \cdot 37 = 1998$ și $73 \cdot 74 = 5402$, deci nu mai avem alte soluții……………………….2p

Deci $n = 36$, $a = 6$

4. a) Va rezulta m$(\widehat{AOC})$= 120° …………………………………………………….3 p



b) Deoarece m$(\widehat{BOC})$ + $\frac{m(\widehat{AOB})}{2}$ = 85° și m$(\widehat{BOC})$ + m$(\widehat{AOB})$ = 120° rezultă că $\frac{m(\widehat{AOB})}{2}$ = 35°, deci m$(\widehat{AOB})$ = 70° , m$(\widehat{BOC})$ = 50° ……………………………………… 4 p

Barem clasa a VI-a

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a VI-a

Subiecte:

1.

a) Calculați suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\frac{1}{2+4+6+8}$ și scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă.

b) Arătați că

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\ldots+\frac{1}{2+4+6+\ldots+4024}\right)=\frac{1}{2013}$$

Septimiu Voiculeț, Videle, Teleorman

2. Fie $n=\overline{abcdab}$ cu proprietatea $\overline{cd}=2\overline{ab}$.

a) Să se arate că numerele n care îndeplinesc condițiile din enunț sunt divizibile cu 101.

b) Câte numere care îndeplinesc condițiile din enunț sunt pătrate perfecte?

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

3. a) Arătați că numerele de forma $\overline{aaa}$ sunt divizibile cu 37.

b) Să se determine numărul natural n si cifra nenulă a care verifică relația $1+2+3+\ldots+n=\overline{aaa}$.

Mihai Bodan, Cosmești, Teleorman

4. Unghiurile $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{BOC}$ sunt adiacente. Bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ formează cu semidreapta $[OC$ un unghi de măsură $85°$, iar bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ *și* $\widehat{BOC}$ formează un unghi de $60°$.

a) Determinați măsura unghiului $\widehat{AOC}$

b) Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.