

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

CLASA A XI-A

- 1.) Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$ și să se calculeze suma $S = \sum_{k=0}^{2015} A^k$.
- 2.) Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_n = 3a_{n+1} + 4$ și $a_1 = 0$, iar șirul $b_n = a_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2k-1)b_n$.
- 3.) Să se calculeze limita $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{1}{n^3}}$.
- 4.) Se consideră șirul de numere reale $a_1 = a, a_2 = b, a, b \in (0, \infty)$ cu termenii a_1, a_2, a_3 în progresie aritmetică, cu termenii a_2, a_3, a_4 în progresie geometrică, cu termenii a_3, a_4, a_5 în progresie aritmetică, cu termenii a_4, a_5, a_6 în progresie geometrică și așa mai departe.
- a) Să se determine formula termenului general al șirului.
- b) Să se calculeze valoarea lui a și b pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{2n} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n \right) = \frac{4}{3}$.

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

BAREM

CLASA A XI-A

1.)	Din oficiu	1p
	$\lambda(I_2 + A)(I_2 - A) = I_2 \Rightarrow \lambda(I_2 - A^2) = I_2$ și cum $A^2 = -I_2$ rezultă $\lambda = \frac{1}{2}$	2p
	Din $A^2 = -I_2$ obținem $A^3 = -A$ și $A^4 = I_2$	1p
	Avem $A^{4k} = I_2$; $A^{4k+1} = A$; $A^{4k+2} = -I_2$ și $A^{4k+3} = -A$	2p
	Cum $A^0 + A^1 + A^2 + A^3 = I_2 + A + (-I_2) + (-A) = O_2$ avem	2p
	$S = \sum_{k=0}^{2015} A^k = \underbrace{A^0 + A^1 + A^2 + A^3}_{=O_2} + \dots + \underbrace{A^{2012} + A^{2013} + A^{2014} + A^{2015}}_{=O_2} = O_2$	2p

2.)	Din oficiu	1p
	$a_n = 3a_{n+1} + 4 \Rightarrow a_n + 2 = 3a_{n+1} + 6 \Rightarrow a_n + 2 = 3(a_{n+1} + 2)$ (1)	2p
	$b_n = a_n + 2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} b_n = 3b_{n+1} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ de unde rezultă că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică cu primul termen $b_1 = 2$ și rația $q = \frac{1}{3}$, deci $b_n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}$	2p
	Cum $\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - n = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$	1p
	Avem $\sum_{k=1}^n (2k-1)b_n = n^2 \cdot \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2n^2}{3^{n-1}}$ de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2k-1)b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3^{n-1}}$	1p
	Pentru calculul limitei aplicăm de două ori teorema lui Stolz-Cesaro (șirul cu termenul general $x_n = 3^{n-1}, n \geq 1$ fiind strict crescător)	3p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^2 - 2n^2}{3^n - 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3) - (2n+1)}{3^n - 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$	

3.)	Din oficiu	1p
	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx)^{\frac{1}{x}} =$	
	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx)^{\frac{1}{\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx}} \right]^{\frac{\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx}{x}}$	3p
	$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{2^2 \sin 2x}{2x} + \dots + \frac{n^2 \sin nx}{nx}} = e^{1+2^2+\dots+n^2} = e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$	4p
	$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right)^{\frac{1}{n^3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}} = e^{\frac{1}{3}}$	2p

4.)	Din oficiu	1p
	a_1, a_2, a_3 progresie aritmetică $\Rightarrow a_3 = 2a_2 - a_1 = 2b - a$ a_2, a_3, a_4 progresie geometrică $\Rightarrow a_4 = \frac{a_3^2}{a_2} = \frac{(2b - a)^2}{b}$	1p
	a_3, a_4, a_5 progresie aritmetică $\Rightarrow a_5 = 2a_4 - a_3 = \frac{(2b - a)(3b - 2a)}{b}$	1p
	a_4, a_5, a_6 progresie geometrică $\Rightarrow a_6 = \frac{a_5^2}{a_4} = \frac{(3b - 2a)^2}{b}$	1p
	Presupunem, că $a_{2k-1} = \frac{[(k-1)b - (k-2)a][kb - (k-1)a]}{b}$ și $a_{2k} = \frac{[kb - (k-1)a]^2}{b}$, trebuie să demonstrăm că $a_{2k+1} = \frac{[kb - (k-1)a][(k+1)b - ka]}{b}$ și $a_{2k+2} = \frac{[(k+1)b - ka]^2}{b}$	1p
	$a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ progresie aritmetică \Rightarrow $a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2 \frac{[kb - (k-1)a]^2}{b} - \frac{[(k-1)b - (k-2)a][kb - (k-1)a]}{b}$ $= \frac{[kb - (k-1)a][(k+1)b - ka]}{b}$, $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ progresie geometrică \Rightarrow $a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{\left\{ \frac{[kb - (k-1)a][(k+1)b - ka]}{b} \right\}^2}{\frac{[kb - (k-1)a]^2}{b}} = \frac{[(k+1)b - ka]^2}{b}$.	1p
	Deci formula termenului general este $a_{2k-1} = \frac{[(k-1)b - (k-2)a][kb - (k-1)a]}{b}$ și $a_{2k} = \frac{[kb - (k-1)a]^2}{b}$, pentru $\forall k \in \mathbb{N}^*$	1p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{2n} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)^2 n^2 - 2(a^2 - ab)n + a^2}{b} - \frac{1}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[3(b-a)^2 - b]n^2 - (6a^2 - 6ab + 4b)n + 3a^2}{3b} = \frac{4}{3}$	1p
	Rezultă că $\begin{cases} 3(b-a)^2 - b = 0 \\ 3a^2 - 3ab + 2b = 0 \\ \frac{a^2}{b} = \frac{4}{3} \end{cases}$	1p
	Scăzând ecuația a doua din prima rezultă că $b(b-a-1) = 0$. Deoarece $a, b \in (0, \infty)$, avem $b = a + 1$. Înlocuim în ecuația a treia obținem $3a^2 - 4a - 4 = 0$ cu soluțiile 2 și $-\frac{2}{3}$, dintre care convine $a = 2$ și astfel $b = 3$.	1p