

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a VI-a

VARIANTA 2

1. Pentru un număr natural notăm  $P_n$  produsul divizorilor naturali ai lui  $n$ .  
Determinați  $n$  cu proprietatea  $P_n = 6^{1575}$

G.M. 7-8-9/2011

2. Aflați numerele de forma  $\overline{abcd}$  divizibile cu 36 știind că prin împărțire la 5 dau restul 2 și  $a - d = 4$

G.M. 5/2011

3. Aflați numerele naturale  $\overline{ab}$  cu  $a > b$  astfel încât:

$$\frac{\overline{ab}}{a-b} = \overline{ba} - 3$$

Braila, 2007

4. Fie unghiul ascuțit  $AOB$ . În semiplanul determinat de  $OA$  care nu conține  $OB$  se duc semidreptele  $OX$  și  $OY$  astfel încât  $m(\sphericalangle XOY) = m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ$  și  $OE$  este bisectoarea  $\sphericalangle XOY$ .

a) Arătați că semidreapta  $OE$  se află în interiorul  $\sphericalangle AOY$

b) Știind că  $m(\sphericalangle XOY) = \frac{11}{4} \cdot m(\sphericalangle AOB)$  aflați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle AOE$  și  $\sphericalangle BOE$

Maramureș, 2008

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a VI-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

I.  $P_n = 6^{1575} = 2^{1575} \cdot 3^{1575}$

Deducem  $n = 2^x \cdot 3^y$ ;  $x, y \in \mathbb{N}^*$  ..... 1p.

Divizorii lui  $n$  sunt:  $1, 2, 2^2, \dots, 2^x$

$3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, \dots, 3 \cdot 2^x$

⋮

$3^y, 3^y \cdot 2, 3^y \cdot 2^2, \dots, 3^y \cdot 2^x$  ..... 1p.

$$P_n = (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^x)^{y+1} \cdot (3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^y)^{x+1}$$

$$P_n = 2^{\frac{x(x+1)(y+1)}{2}} \cdot 3^{\frac{y(y+1)(x+1)}{2}} \dots \dots \dots 1p.$$

$$P_n = 2^{1575} \cdot 3^{1575} \Rightarrow x(x+1)(y+1) = 3150$$

$$\text{și } y(y+1)(x+1) = 3150 \dots \dots \dots 1p.$$

$$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y \dots \dots \dots 1p.$$

$$\Rightarrow x(x+1)^2 = 3150 = 14 \cdot 15^2 \Rightarrow x = y = 14 \dots \dots \dots 1p.$$

$$\Rightarrow n = 2^{14} \cdot 3^{14} = 6^{14} \dots \dots \dots 1p.$$

II.  $\overline{abcd} = 5k + 2 \Rightarrow d \in \{2, 7\} \dots \dots \dots 1p.$

$$36 / \overline{abcd} \Rightarrow \overline{abcd} \text{ este număr par} \Rightarrow d = 2 \dots \dots \dots 1p.$$

$$\text{Cum } a - d = 4 \Rightarrow a = 6 \dots \dots \dots 1p.$$

$$4 \cdot 9 = 36; (4, 9) = 1 \Rightarrow 4 / \overline{6bc2} \text{ și } 9 / \overline{6bc2} \dots \dots \dots 1p.$$

$$4/\overline{6bc2} \Rightarrow c \in \{1,3,5,7,9\} \dots\dots\dots 1p.$$

$$9/\overline{6bc2} \Rightarrow 9/6 + b + c + 2 = b + c + 8 \dots\dots\dots 1p.$$

Finalizare: Numerele  $\overline{abcd}$  ce îndeplinesc condiția problemei sunt:

$$6012; 6732; 6552; 6372; 6192 \dots\dots\dots 1p.$$

III.  $\overline{ab} = (a - b)(\overline{ba} - 3)$

Notăm  $a - b = x; x \in \square^* \Rightarrow a = x + b \dots\dots\dots 1p.$

Avem:  $10a + b = x \cdot (10b + a - 3) \Rightarrow 10(x + b) + b =$

$$= x(10b + x + b - 3) \Rightarrow 10x + 11b = 10xb + x^2 + xb - 3x \dots\dots\dots 1p.$$

$$\Rightarrow 13x - x^2 = 11xb - 11b \Rightarrow x(13 - x) = 11b(x - 1) \dots\dots\dots 1p.$$

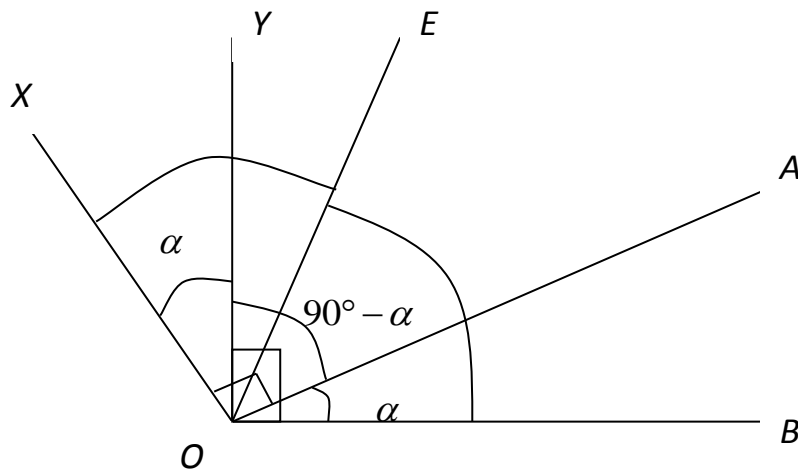
$$\Rightarrow 11/x(13 - x) \dots\dots\dots 1p.$$

$$\Rightarrow 11/x \text{ sau } 11/13 - x \Rightarrow x = 2 \dots\dots\dots 1p.$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 11 = 11 \cdot b \Rightarrow b = 2 \dots\dots\dots 1p.$$

$$\Rightarrow a = 2 + 2 = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 42 \dots\dots\dots 1p.$$

IV.



a)  $m(\sphericalangle AOB) = \alpha \Rightarrow m(\sphericalangle YOA) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle XOY) = \alpha \dots\dots\dots 1p.$

$m(\sphericalangle XOB) = 90^\circ + \alpha$

$(OE \text{ bisectoarea } \sphericalangle XOB \Rightarrow m(\sphericalangle XOE) = m(\sphericalangle BOE) = \frac{90^\circ + \alpha}{2} \dots\dots\dots 1p.$

Arătăm că  $m(\sphericalangle YOY) > m(\sphericalangle BOE) > m(\sphericalangle AOB) \Leftrightarrow 90^\circ > \frac{90^\circ + \alpha}{2} > \alpha \quad 1p.$

i)  $90^\circ > \frac{90^\circ + \alpha}{2} \Leftrightarrow 90^\circ > \alpha$

ii)  $\frac{90^\circ + \alpha}{2} > \alpha \Leftrightarrow 90^\circ > \alpha \dots\dots\dots 1p.$

$\Rightarrow (OE \in Int(\sphericalangle AOY))$

b)  $m(\sphericalangle XOY) = \frac{11}{4} \cdot m(\sphericalangle AOB) \Leftrightarrow \frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{11\alpha}{4} \dots\dots\dots 1p.$

$\Leftrightarrow 180^\circ + 2\alpha = 11\alpha \Leftrightarrow 9\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 20^\circ \dots\dots\dots 1p.$

$m(\sphericalangle AOB) = 20^\circ; m(\sphericalangle XOB) = 20^\circ + 90^\circ = 110^\circ \dots\dots\dots 1p.$