OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2013

Clasa a V-a

SUBIECTUL I (7p)

Să se determine restul împărţirii numărului $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot 69\cdot 70 + 1234$ la 2013.

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră opt numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror şapte numere din cele opt, se obţin rezultatele: 42, 47, 50, 52, 54, 55, 56, 57. Determinaţi cele opt numere.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL III (7p)

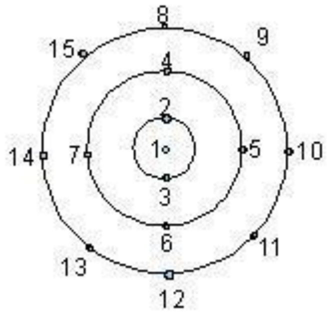
Un număr natural de forma $\overline{abcd}$ se numeşte *superb* dacă $4\cdot\overline{ab}=\overline{cd}$

a). Câte numere *superbe* există?

b). Arătaţi că orice număr *superb* se divide cu 13.

SUBIECTUL IV (7p)

Se consideră numerele 1, 2, 3, ...aşezate în următoarea schemă de joc tip DARTS (joc cu săgeţi la ţintă)



a) Desenaţi următorul cerc cu numerele corespunzătoare. Pe al câtelea cerc se găseşte numărul 2013?

b) Să se calculeze suma numerelor pe verticală până la al 10-lea cerc inclusiv, numărând din interior spre exterior. (numărul 1 nu se află pe nici un cerc, este în interiorul primului cerc).

c) Dacă o săgeată DARTS nimereşte între doua cercuri consecutive definim scorul ei ca fiind diferenţa dintre suma numerelor de pe cercul mare şi de 4 ori suma numerelor de pe cercul mai mic. Să se precizeze poziţia unei săgeţi cu scor 128.

Subiecte selectate şi prelucrate de prof. Mariana Ciobanaşu şi prof. Geanina Tudose

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru: 2 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 Februarie 2013

CLASA a V a
BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Să se determine restul împărţirii numărului 1·2·3·4· ....·69 ·70 + 1234 la 2013.

<u>Soluţie:</u>

$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ **2puncte**

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 69 \cdot 70 = 1 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot \underline{11} \cdot 12 \cdot \ldots \cdot \underline{61} \cdot 62 \cdot \ldots \cdot 69 \cdot 70 =$

$= 2013 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 60 \cdot 62 \cdot \ldots \cdot 69 \cdot 70$ **2puncte**

$1234 < 2013$ .... **1 punct**

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 69 \cdot 70 + 1234 = 2013 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 60 \cdot 62 \cdot \ldots \cdot 69 \cdot 70) + 1234$ .... **1 punct**

conform Teoremei Împărţirii cu Rest, restul cerut este 1234................................... **1 punct**

Subiectul II

Se consideră opt numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror şapte numere, din cele opt, se obţin rezultatele: 42, 47, 50, 52, 54, 55, 56, 57. Determinaţi cele opt numere.

Gazeta matematică

<u>Soluţie:</u>

Notăm cu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ cele opt numere.

Adunând termen cu termen cele opt sume, se obţine

$7 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 413$ .... **2 puncte**

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 59$ .... **2 puncte**

Numerele sunt: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 17 .... **3 puncte**

Subiectul III

Un număr natural de forma $\overline{abcd}$ ***se numeşte superb dacă*** $4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$ **.**

- ***a) Câte numere superbe există ?***
- ***b) Arătaţi că orice număr superb se divide cu 13.***

<u>Soluţie:</u>

a) $4 \cdot 10 \le 4 \cdot \overline{ab} \le 99$ ....**2 puncte**

$10 \le \overline{ab} \le 24$ .... **1 punct**

Sunt 15 numere .... **1 punct**

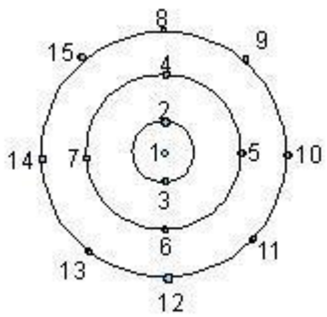
b) $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot \overline{ab} = 104 \cdot \overline{ab}$ ....**1 punct**

$104 \cdot \overline{ab} = 13 \cdot 8 \cdot \overline{ab}$ .... **1 punct**

Finalizare ....**1 punct**

Subiectul IV

Se consideră numerele 1, 2, 3, ...aşezate în următoarea schemă de joc tip DARTS (joc cu săgeţi la ţintă)



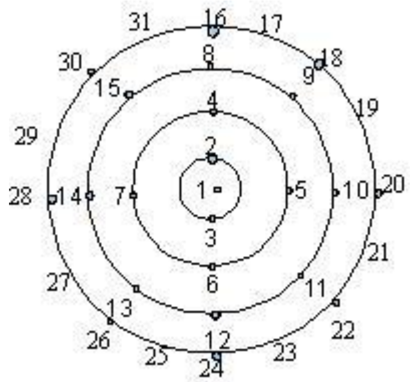
a). Desenaţi următorul cerc cu numerele corespunzătoare. Pe al catelea cerc se găseşte numărul 2013?

b). Să se calculeze suma numerelor pe verticală până la al -10-lea cerc inclusiv, numărând din interior spre exterior.

c). Dacă o săgeată DARTS nimereşte între doua cercuri consecutive definim scorul ei ca fiind diferenta dintre suma numerelor de pe cercul mare si de 4 ori suma numerelor de pe cercul mai mic. Să se precizeze poziţia unei săgeţi cu scor 128.

Soluţie:

a). Pe următorul cerc se găsesc numerele 16, 17, 18, 19, ...31 ……………………….….. **1punct**



Observăm că pe verticală, primul cerc are cel mai mic număr pe 2^1, cercul al doilea pe 2^2, cercul al treilea pe 2^3, etc.

Cum $2^{10}=1024$ şi $2^{10}<2013<2^{11}=2048$, numărul 2013 se găseşte pe al -10-lea cerc……..**1punct**

b)

Pe verticală avem două sume $1+2^1+2^2+...+2^{10}$ şi $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+...+3\cdot 2^9$

$S_1=1+2^1+2^2+...+2^{10}=2^{11}-1$, iar $S_2=3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+...+3\cdot 2^9=3\cdot(2^{10}-1)$ ……….…….. **2puncte**

Suma cerută este $2^{11}-1+3(2^{10}-1)=2^{10}(2+3)-1-3=5\cdot 2^{10}-4$ (poate fi lăsat -1-3) ……………..**1 punct**

c).

Observăm următoarea regulă: numerele scrise pe al-n-lea cerc între două numere ale cercului al-(n-1)-lea sunt egale cu suma acestor numere de pe cercul al-(n-1)-lea. Exemplu 9=4+5, 11=5+6, 13=6+7, etc, cu excepţia ultimului număr 15=7+8=7+4+4 ………………………………. **1punct**

Constatăm ca suma numerelor de pe cercul al-3-lea este de 4 ori suma de pe cercul al-2-lea şi încă $4=2^2$. În general, suma de pe cercul al-n-lea va fi cu 2^{n-1} mai mare ca de 4 ori suma de pe cercul al-(n-1)-lea.

$S_n=2^n+2^n+1+2^n+2+...2^n+2^n-1$, iar $S_{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}+1+2^{n-1}+2+...2^{n-1}+2^{n-1}-1$

$2^n=2^{n-1}\cdot 2$, $2^n+1=2^{n-1}+2^{n-1}+1$, ...,$2^n+2^n-1=2^{n-1}+2^{n-1}-1+2^{n-1}+\mathbf{2^{n-1}}$ Deci $S_n-4S_{n-1}=$ $\mathbf{2^{n-1}}$

Cum $128=2^7$, săgeata va ajunge între cercul 7 şi cercul 8………………………………… **2puncte**