Clasa a VII-a

1. Determinați mulțimea $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 1, x^2 + 2x + y^2 = 9 \right\}$.

2. Fie $ABCD$ un paralelogram. Printr-un punct oarecare $P \in (AB)$ se duc paralele la dreptele BD și AD, care intersectează AD în E, respectiv BD în F. Dacă Q și S sunt mijloacele segmentelor AD, respectiv BC, arătați că dreptele EF, DP și QS sunt concurente.

3. În exteriorul triunghiului ascuțitunghic ABC se construiește pătratul $BCDE$. Notăm cu M și N punctele de intersecție dintre dreapta BC și dreptele AD, respectiv AE. Perpendicularele în N și M pe BC taie AB respectiv AC în P, respectiv Q. Demonstrați că $MNPQ$ este pătrat și calculați perimetrul său în funcție de $a = BC$ și $h = d(A, BC)$.

4. Dacă a, b și c sunt numere reale pozitive, demonstrați că are loc inegalitatea

$$\frac{a^3 + a}{b^2} + \frac{b^3 + b}{c^2} + \frac{c^3 + c}{a^2} \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right).$$

Subiect elaborat de prof. Valerica Bența

SOLUTII

1. Înlocuind $y = 1 - x$ în egalitatea $x^2 + 2x + y^2 = 9$, obținem că $x^2 = 4$, de unde $x = \pm 2$. Deducem că $A = \{(2,-1),(-2,3)\}$.

2. Cum *DEPF* este paralelogram, segmentele *DP* şi *EF* au acelaşi mijloc *M*. Pe de altă parte, $QS \parallel AB$ şi $QM \parallel AB$ (deoarece *QM* este linie mijlocie în triunghiul *DAP*), prin urmare punctele Q, M, S sunt coliniare. Rezultă că dreptele *EF*, *DP* şi *QS* sunt concurente în *M*.

3. Prelungim înălțimea *AS* a triunghiului *ABC* până când întâlneşte *DE* în *T* şi notăm lungimea segmentului *ET* cu *x*. Din $\Delta ANS \sim \Delta AET$ deducem că $NS = \dfrac{xh}{a+h}$, iar din $\Delta AMS \sim \Delta ADT$ obținem că $MS = \dfrac{(a-x)h}{a+h}$; astfel, $MN = MS + NS = \dfrac{ah}{a+h}$. Deoarece $\Delta BNP \sim \Delta BSA$, rezultă că $\dfrac{PN}{AS} = \dfrac{BN}{BS}$, deci $\dfrac{PN}{h} = \dfrac{a}{a+h}$, prin urmare $PN = \dfrac{ah}{a+h}$. Analog se arată că $MQ = \dfrac{ah}{a+h}$. Patrulaterul *MNPQ* are unghiurile $\sphericalangle M$ şi $\sphericalangle N$ drepte şi laturile *PN*, *MN* şi *MQ* egale; atunci acest patrulater este pătrat, iar perimetrul său este $\dfrac{4ah}{a+h}$.

4. Deoarece $x^3 + x \ge 2x^2, \forall x > 0$, ar fi destul să demonstrăm că $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \ge \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}$. Această din urmă inegalitate se obține din binecunoscuta $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$, în care considerăm $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$.