Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 16 februarie 2014

Problema 1.

Fie $f : A \to B$ şi A_0, B_0 două mulţimi astfel încât $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Definind $f^{-1}(B_0) = \{x \in A |\, f(x) \in B_0\}$, arătaţi că au loc următoarele:

i) $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$, cu egalitate atunci când f este injectivă.

ii) $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$, cu egalitate atunci când f este surjectivă.

***

Problema 2.

Fie x, y, z numere reale astfel încât $\frac{xyz}{x+y} = -1$, $\frac{xyz}{y+z} = 1$ şi $\frac{xyz}{x+z} = a$, unde $a > \frac{1}{2}$ este un număr real. Determinaţi produsul xyz.

G. M. 26736

Problema 3.

Să se găsească $a \in \mathbb{R}$ astfel încât identitatea de mai jos să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(2 - \cos a - \sqrt{3}\sin a\right)^{\frac{x}{2}} + \left(2 - \cos a + \sqrt{3}\sin a\right)^{\frac{x}{2}} = 2\,|1 - 2\cos a|^{\frac{x}{2}}.$$

***

Problema 4.

Fie z un număr complex cu proprietatea că $|z+1| \geq 2$. Demonstraţi că $|z^3 + 1| \geq 1$.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7;
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 16 februarie 2014
Soluţii

Problema 1.

i) Fie $x \in A_0$. Atunci $f(x) \in f(A_0)$. Din faptul că

$$f^{-1}(f(A_0)) = \{a \in A | f(a) \in f(A_0)\},$$

obţinem că $x \in f^{-1}(f(A_0))$, deci $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$.

Dacă f este injectivă atunci pentru $x \in f^{-1}(f(A_0))$, avem că $f(x) \in f(A_0)$, de unde deducem că există $a_0 \in A_0$ astfel incât $f(x) = f(a_0)$, deci $x = a_0 \in A_0$. Aşadar $f^{-1}(f(A_0)) \subseteq A_0$. Aşadar dacă f este injectivă atunci $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$

ii) Dacă $x \in f(f^{-1}(B_0))$ rezultă că $x \in f(\{a | f(a) \in B_0\})$, deci $x \in B_0$ şi am demonstrat că $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$. Dacă f este surjectivă, din faptul că $x \in B_0$ rezultă că există $a \in A$ astfel incât $f(a) = x$. Obţinem astfel că $a \in f^{-1}(B_0)$, deci $x \in f(f^{-1}(B_0))$ şi $B_0 \subseteq f(f^{-1}(B_0))$. Aşadar dacă f este surjectivă atunci $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$.

Problema 2.

Relaţiile din ipoteza se pot rescrie astfel

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = -1, \ \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1, \ \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = \frac{1}{a}.$$

Putem găsi astfel că $\frac{1}{xy} = \frac{1+2a}{2a}$, $\frac{1}{yz} = \frac{1-2a}{2a}$ si $\frac{1}{zx} = -\frac{1}{2a}$. Inmulţind cele trei relaţii obţinem că

$$xyz = \pm\sqrt{\frac{8a^3}{4a^2-1}}.$$

Problema 3.

$$\cos a \pm \sqrt{3}\sin a = 2\left(\frac{1}{2}\cos a \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos a \pm \sin\frac{\pi}{3}\sin a\right) = 2cos\left(a \mp \frac{\pi}{3}\right)$$

Mai departe

$$2 - (\cos a \pm \sqrt{3}\sin a) = 2 - 2\cos(a \mp \frac{\pi}{3}) = 4\sin^2\frac{a \mp \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Partea stângă a identităţii iniţiale devine

$$2^x\left|\sin\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}\right|^x + 2^x\left|\sin\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}\right|^x.$$

Partea dreaptă a identităţii devine

$$2^{\frac{x}{2}+1}\left|\frac{1}{2}-\cos a\right|^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{x}{2}+1}\left|\cos\frac{\pi}{3}-\cos a\right|^{\frac{x}{2}} = 2^{x+1}\left|\sin\left(\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|^{\frac{x}{2}}\left|\sin\left(\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|^{\frac{x}{2}}.$$

Introducând ultimele relaţii in prima obţinem

$$\left[\left|\sin\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}\right|^{\frac{x}{2}} - \left|\sin\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}\right|^{\frac{x}{2}}\right]^2 = 0$$

adică

$$\sin\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2} = \pm\sin\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}$$

şi

$$a = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Problema 4.

Pentru că $z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$ ţinând cont că $|z+1|\geq 2$ este suficient să demonstrăm că $|z^2-z+1|\geq\frac{1}{2}$. Dacă vom nota prin $r=|z+1|\geq 2$ vom avea avea că $z+1=r(\cos t+i\sin t)$, unde $t=arg(z+1)$. Atunci avem că

$$z^2-z+1=r^2(\cos 2t+i\sin 2t)-3r(\cos t+i\sin t)+3,$$

$$|z^2+z+1|^2 = r^4+9r^2+9-(6r^3+18r)\cos t+6r^2(2\cos^2 t-1) =$$

$$= \frac{1}{4}(r^2-3)^2+12\left(r\cos t-\frac{r^2+3}{4}\right)^2\geq\frac{1}{4}.$$

Deci $|z^2-z+1|\geq\frac{1}{2}$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 16 februarie 2014
Barem de corectare

Problema 1.
Problema 1.

Oficiu ______ 1p
Demonstrarea fapului că $A_0 \subseteq f^{-1}(f(A_0))$. ______ 1.5p
Demonstrarea cazului de egalitate atunci când f este surjectivă ______ 1.5p
Demonstrarea fapului că $f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0$ ______ 1.5p
Demonstrarea cazului de egalitate atunci când g este surjectivă ______ 1.5p
Total ______ 7p

Problema 2.

Oficiu ______ 1p
Rescrierea relaţiilor sub forma $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=-1$, $\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$, $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{a}$. 3p
Găsirea soluţiilor $\frac{1}{xy}=\frac{1+2a}{2a}$, $\frac{1}{yz}=\frac{1-2a}{2a}$ si $\frac{1}{zx}=-\frac{1}{2a}$ ______ 2p
Găsirea concluziei $xyz=\pm\sqrt{\frac{8a^3}{4a^2-1}}$ ______ 1p
Total ______ 7p

Problema 3.

Oficiu ______ 1p
Aducerea membrului stâng la forma $2^x\left|\sin\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}\right|^x+2^x\left|\sin\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}\right|^x$ ______ 2p
Aducerea membrului drept la forma $2^{x+1}\left|\sin\left(\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|^{\frac{x}{2}}\left|\sin\left(\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right|^{\frac{x}{2}}$ ______ 1.5p
Obţinerea ecuaţiei $\sin\frac{a-\frac{\pi}{3}}{2}=\pm\sin\frac{a+\frac{\pi}{3}}{2}$ ______ 1.5p
Obţinerea soluţiilor ______ 1p
Total ______ 7p

Problema 4.

Oficiu ______ 1p
Reducerea concluziei la a demonstra că $|z^2-z+1|\geq\frac{1}{2}$ ______ 1p
Obţinerea faptului că $|z^2-z+1|^2=\frac{1}{4}(r^2-3)^2+12\left(r\cos t-\frac{r^2+3}{4}\right)^2$ ______ 3p
Deducerea concluziei $|z^2-z+1|\geq\frac{1}{2}$ ______ 2p
Total ______ 7p