INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a VIII-a

PROBLEMA 1

a)Arătați că: $A=\sqrt{1+3+5+...+2015}\in Q$

b)Dacă numerele reale a și b verifica relația : $a^2+b^2-4\sqrt{3}a-6\sqrt{2}b+30=0$ atunci calculați:

E= $(2a^{-1}+3b^{-1})(\frac{1}{b^{-1}}-\frac{1}{a^{-1}})$

Soluție:

a) $1+3+5+...+2015=(1+2+3+4+....+2015)-(2+4+6+...+2014)=$
$=2015\cdot1008-1007\cdot1008=1008^2$ …………. 2 puncte

$A=\sqrt{1+3+5+...+2015}=1008\in Q$ .... 1 punct

b) $\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+\left(b-3\sqrt{2}\right)^2=0$ .... 1 punct

$a-2\sqrt{3}=0\Rightarrow a=2\sqrt{3},\ \ b-3\sqrt{2}=0\Rightarrow b=3\sqrt{2}$ .... 1 punct

$E=\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}+3\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ .... 1 punct

$E=1$ .... 1 punct

PROBLEMA 2

a) Fie r, s ϵ Q. Arătați că numărul $\left(r+\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)$ nu este rațional.

b) Fie numerele reale pozitive a,b,c astfel încât $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=6$. Arătaţi că $a+b+c\le2\sqrt{3}$.
(Gazeta Matematica)

Soluție:

a) $A=\left(r+\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)\in Q\Rightarrow\frac{1}{A}=\frac{1}{\left(r+\sqrt{2}\right)\left(s+\sqrt{3}\right)}\in Q$ …….. 1 punct

$\frac{\left(r-\sqrt{2}\right)\left(s-\sqrt{3}\right)}{\left(r^2-2\right)\left(s^2-3\right)}\in Q\Rightarrow B=\left(r-\sqrt{2}\right)\left(s-\sqrt{3}\right)\in Q$ …………….. 1 punct

Din $A+B\in Q\Rightarrow 2rs+2\sqrt{6}\in Q\Rightarrow\sqrt{6}\in Q$ fals ………………………… 1 punct

b) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=6 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=12$ ....2 puncte

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \le 12$ ....1 punct

$\Rightarrow a+b+c \le 2\sqrt{3}$ ....1 punct

PROBLEMA 3

Se consideră A,B,C,D patru puncte necoplanare astfel ca $AB \perp AC$, $DB \perp AB$, $DC \perp AC$, iar M şi N mijloacele segmentelor $[AD]$, respectiv $[BC]$.

a)Să se demonstreze că $MN \perp (ABC)$.

b)Dacă $AB = 30cm$, $BD = 40cm$ şi $BC = 48cm$, să se calculeze $d(D,(ABC))$.

Soluţie:

a) $\triangle ABD, m(\sphericalangle ABD) = 90°, BM$ mediană $\Rightarrow BM = \frac{DA}{2}$ ....1 punct

$\triangle DCA, m(\sphericalangle DCA) = 90°, CM$ mediană $\Rightarrow CM = \frac{DA}{2}$ ....1 punct

$\Rightarrow \triangle BMC$ isoscel, MN mediană $\Rightarrow MN \perp BC$ ....1 punct

Dacă P mijlocul $[AB] \Rightarrow MP$ linie mijlocie $\Rightarrow MP \parallel DB \Rightarrow MP \perp AB$. Analog, $NP \perp AB$.

Rezultă că $AB \perp (MNP) \Rightarrow AB \perp MN \Rightarrow MN \perp (ABC)$ ....1 punct

b) $BM = \frac{DA}{2} = 25cm$ ....1 punct

$MN = 7cm$ ....1 punct

$d(D,(ABC)) = DD' = 2MN = 14cm$ ....1 punct

PROBLEMA 4

Fie planul pătratului ABCD se ridică perpendiculara BM cu BM=2$\sqrt{3}$ cm. Ştiind că triunghiul MAC este echilateral, calculaţi:

a) latura pătratului ABCD;
b) distanţa dintre dreptele AC si MD.

Soluţie:

a) Notam cu l- lungimea laturii patratului, $\Delta MAC \equiv \Delta MBC (C.C.) \Rightarrow [MC] \equiv [MA]$. Deoarece ΔMAC -este echilateral=>AC=MC=MA=l$\sqrt{2}$ ....2 p

Utilizand Teorema lui Pitagora in ΔMBC obtinem l=2$\sqrt{3}$ ....1 p

Asadar AB=2$\sqrt{3}$ cm...1 p

b) Fie {O}=AC$\cap$BD. Construim OP$\perp MD$(1) ....1 p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

Din $AC \perp BD, AC \perp MB \Rightarrow AC \perp (MBD) \Rightarrow AC \perp OP (2)$ ....1 p

Din relatiile (1) si (2) obinem ca OP este perpendiculara comuna a dreptelor MD si AC,

deci d(MD,AC)=OP=> Din $\Delta DPO \sim \Delta DBM \Rightarrow OP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ =d(MD,AC)...........1 p