

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025
Soluții

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & t_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați că

- (a) Dacă $a + d$ este un număr par, atunci $x_n + t_n$ este un număr par, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Dacă $a + d$ și $b + c$ sunt numere impare, atunci $x_n + t_n$ este un număr impar, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

Romeo Ilie

Soluție.

- (a) A satisface ecuația caracteristică $A^2 - (a + d) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2 \dots \dots$ **1p**
 Avem $\text{tr}(A^2) = (a + d)^2 - 2 \det(A)$.
 $a + d$ număr par implică $\text{tr}(A^2)$ număr par $\dots \dots \dots$ **1p**
 Din relația $A^k - (a + d) \cdot A^{k-1} + \det(A) \cdot A^{k-2} = O_2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, obținem
 $\text{tr}(A^k) = (a + d) \cdot \text{tr}(A^{k-1}) - \det(A) \cdot \text{tr}(A^{k-2})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2 \dots \dots \dots$ **1p**
 Prin inducție extinsă (inducție tare), rezultă că $x_n + t_n = \text{tr}(A^n)$ este număr
 par, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ $\dots \dots \dots$ **1p**
- (b) $a + d$ și $b + c$ numere impare implică ad , bc numere pare și $\det(A)$ număr par.
 $\dots \dots \dots$ **2p**
 Din relația $\text{tr}(A^k) = (a + d) \cdot \text{tr}(A^{k-1}) - \det(A) \cdot \text{tr}(A^{k-2})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,
 și paritatea numărului $\det(A)$, rezultă prin inducție că $x_n + t_n = \text{tr}(A^n)$ este
 un număr impar, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$ $\dots \dots \dots$ **1p**

2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale și $y_n = \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
 Demonstrați că dacă șirul $(y_n)_{n \geq 2}$ are limită, atunci și șirul $\left(\frac{x_n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ are limită.
 Reciproca este adevărată? Justificați răspunsul.

Romeo Ilie

Soluție.

Presupunem că există $L \in \overline{\mathbb{R}}, L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})}{(2n+1) - (2n-1)}$.

Șirul $z_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, este strict pozitiv, strict crescător și divergent.

Conform Teoremei Stolz-Cesàro, rezultă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1)^2 - n^2}$.

Șirul $t_n = n^2, n \in \mathbb{N}^*$, este strict pozitiv, strict crescător și divergent.

Conform Teoremei Stolz-Cesàro, rezultă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$ **5p**

Reciproca nu este adevărată.

Contraexemplu. Fie $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = 0$, dar șirul $y_n = 2(-1)^{n+1}, n \geq 2$, este divergent **2p**

3. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,2024}$, cu $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{dacă } i = j \\ -1, \text{dacă } i \neq j \end{cases}$.

(a) Calculați $\det(A)$.

(b) O *mutare* într-o matrice constă în schimbarea semnelor elementelor unei linii sau coloane. Decideți dacă este posibil ca, pornind de la matricea A , să obținem o matrice cu două linii sau două coloane identice, după 2024 de *mutări*. Justificați răspunsul.

Gazeta Matematică, enunț modificat

Soluție.

(a) Efectuăm succesiv următoarele operații care invariază valoarea determinantului:

adunăm liniile 2-2024 la prima linie, scoatem factorul -2022 de pe prima linie, scădem prima coloană din coloanele 2-2024 și dezvoltăm determinantul obținut după prima linie. Rezultă: $\det(A) = (-2022) \cdot 2^{2023}$ **3p**

(b) Nu este posibil.

Oricare mutare într-o matrice pătrată schimbă semnul determinantului său. Pornind de la matricea A , după 2024 de *mutări*, obținem o matrice cu determinantul $(-1)^{2024} \det(A) = \det(A) \neq 0$ **2p**

Dacă matricea rezultată ar avea două linii sau două coloane identice, atunci determinantul său ar fi nul. Contradicție. **2p**

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
 (b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n$.

Soluție.

(a) Au loc inegalitățile $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{n}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ **1p**

Rezultă $\frac{n}{n+1} < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicând criteriul cleștelui, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ **1p**

(b) Avem $n(x_n - 1) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+k}} - 1 \right) = \sum_{k=1}^n \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}}$.

Au loc inegalitățile:

$$-\frac{k}{2n^2} < \frac{-k}{(n + \sqrt{n^2+k})\sqrt{n^2+k}} < -\frac{k}{(n+1)(2n+1)}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Cum $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, obținem: $-\frac{n+1}{4n} < n(x_n-1) < -\frac{n}{2(2n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pe baza criteriul cleștelui, rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = -\frac{1}{4}$ **3p**

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [1 + (x_n - 1)]^{\frac{1}{x_n-1}} \right\}^{n(x_n-1)} = e^{-\frac{1}{4}}$ **2p**