



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Subiectul – clasa a VIII-a

Problema 1.

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, unde $a > b > c > 0$, E și F sunt proiecțiile lui A pe $A'D$, respectiv pe $A'B$, iar M și N sunt proiecțiile lui C pe $C'D$, respectiv pe $C'B$. Fie $DF \cap BE = \{G\}$ și $DN \cap BM = \{P\}$.

a) Demonstrați că planele $(A'AG)$ și $(C'CP)$ sunt paralele și aflați distanța dintre cele două plane.

b) Demonstrați că dreapta GP este paralelă cu planul (ABC) și aflați distanța de la dreapta GP la planul (ABC) .

Problema 2.

Arătați că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 7.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3.

Determinați numerele reale x și y care verifică relațiile

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2022 \text{ și } x + y = \frac{2021}{\sqrt{2022}}.$$

Problema 4.

Elevii dintr-o clasă de $n \geq 2$ elevi au avut de rezolvat 2^{n-1} probleme ca temă de vacanță. La verificare, profesorul constată că, pentru orice pereche de probleme diferite:

- există cel puțin un elev care le-a rezolvat pe amândouă și
- există cel puțin un elev care a rezolvat una dintre ele, dar nu și pe cealaltă.

Arătați că există o problemă rezolvată de toți elevii clasei.