Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$.

   a) Determinați numărul elementelor lui M.
   b) Să se calculeze suma elementelor lui M.
   c) Dacă $G = \{A \in M \mid detA = \hat{1}\}$, să se arate că $(G, \cdot)$ este grup.

2. Se consideră mulțimea de funcții:

   $G = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_a(x) = x - 2a\,[x] + a[2x],\ a \in \mathbb{Z}\}$, unde $[y]$ este partea întreagă a numărului y.

   a) Să se arate că dacă $f_a, f_b \in G$, atunci $f_a \circ f_b \in G$.
   b) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ, izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$ unde „$\circ$" este compunerea funcțiilor.

3. Să se calculeze:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2x + sinx}{sinx + cosx + 1}\,dx$$

4. Se consideră funcția
   $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,dt.$

   a) Arătați că:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
   b) Calculați
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,f(x)}{e^x}$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a XII-a

1. a) Numărul elementelor lui M este 36. ……………………………………$2p$

b) Se poate verifica ușor faptul că $(M,+)$ formează grup, cu elementul neutru O_2, deci dacă $A \in M$ atunci și $-A \in M$. Din egalitatea $A = -A$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a, b \in \{\hat{0}, \hat{3}\}$ deci $A \in \left\{\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix}\right\}$ deci

$M = \left\{\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix}, B_1, -B_1, B_2, -B_2, \dots . B_{16}, -B_{16}\right\}$, și suma elementelor lui M este egală cu:

$\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$…………………………………..$2p$

c) $detA = \hat{1} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_6$, verifică $\begin{cases} a = \hat{1} \\ b = \hat{0} \end{cases}$, $\begin{cases} a = \hat{2} \\ b = \hat{3} \end{cases}$, $\begin{cases} a = \hat{4} \\ b = \hat{3} \end{cases}$, $\begin{cases} a = \hat{5} \\ b = \hat{0} \end{cases}$

Notând $A_1 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} \hat{5} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{5} \end{pmatrix}$ $G = \{I_2, A_1, A_2, A_3\}$ *și* tabla operației de înmulțire este:

$\cdot$	I_2	A_1	A_2	A_3
I_2	I_2	A_1	A_2	A_3
A_1	A_1	I_2	A_3	A_2
A_2	A_2	A_3	I_2	A_1
A_3	A_3	A_2	A_1	I_2

Rezultă $(G,\cdot)$ grup.

……………………………………………………………………………………………$3p$

2. a) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a\,(x - 2b[x] + b[2x]) =$
$= x - 2b[x] + b[2x] - 2a\big[x - 2b[x] + b[2x]\big] + a\big[2x - 4b[x] + 2b[2x]\big] =$
$= x - 2b[x] + b[2x] - 2a[x] + 4ab[x] - 2ab[2x] + a[2x] - 4ab[x] + 2ab[2x] =$
$= x - 2(a+b)[x] + (a+b)[2x] = f_{a+b}(x)$.

(Am folosit relația $[x+\propto] = [x] + \propto$, pentru $\propto \in \mathbb{Z}$). Deci $(f_a \circ f_b) = f_{a+b}$……….$3p$

b) Folosind relația de la a) se verifică axiomele grupului comutativ………………………..$2p$
Funcția $g : \mathbb{Z} \to G, g(a) = f_a$ este izomorfism de grupuri……………………………...$2p$

3. Notând:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2x + sinx}{sinx + cosx + 1} dx$$

și

$$\frac{\pi}{2} - x = t \Longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2t + cost}{cost + sint + 1} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - sin^2t + cost}{cost + sint + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cost + sint + 1 - sin^2t - sint}{cost + sint + 1} dt =$$

……………………………………………………………………………………………$4p$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{sin^2t + sint}{cost + sint + 1} \right) dt = \frac{\pi}{2} - I \Longrightarrow 2I = \frac{\pi}{2}$$

deci

$$I = \frac{\pi}{4}$$

…………………………………………………………………………………....$3p$

4. a) Folosind inegalitatea $e^t \geq t + 1,\ t \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt \geq \int_0^x 1 dt = x$, deci $f(x) \geq x, \forall\, x \in [0, \infty)$. ……………………………………………………$2p$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

………………………………………………………………………………………..$1p$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\, f(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{e^x}{x}} =$$

$$\underbrace{= \frac{\infty}{\infty}}_{l'Hospital} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\frac{e^x(x-1)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{\frac{e^x(x-1)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

……………………………………………………………………………………………$4p$

Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.