R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Rezolvaţi ecuaţia $2^{2^x-1}-1=\log_2(1+x)$.

PROBLEMA 2

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2\sin 2x+8(\sin x+\cos x)+3.$

Determinaţi imaginea funcţiei f.

PROBLEMA 3

Fie $n\geq 2$ *număr natural şi* a,b *două numere reale pozitive. Să se arate că* $n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$.

PROBLEMA 4

Notăm cu M,N,P,Q,R *şi* S *mijloacele segmentele* $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ *respectiv* (NQ) *dintr-un pentagon convex* $ABCDE$. *Arătaţi că* $RS \parallel AB$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat pentru fiecare problemă este de 7 puncte.

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Rezolvaţi ecuaţia $2^{2^x-1}-1=\log_2(1+x)$.

<u>Soluţie:</u>

Fie $f:\mathbf{R}\to(-1,\infty),\ f(x)=2^x-1$.
Ecuaţia se scrie: $f(f(x))=f^{-1}(x)$, de unde $f(f(f(x)))=x$. ……………2 puncte

Dacă $f(x)<x \Rightarrow f(f(x))<f(x)$ (f este crescătoare), de unde $f(f(x))<x$.
Rezultă $f(f(f(x)))<f(x)<x$, deci $f(f(f(x)))<x$, imposibil, pt că $f(f(f(x)))=x$.
Deci inegalitatea $f(x)<x$ este imposibilă.………………………………2 puncte

Dacă $f(x)>x \Rightarrow f(f(x))>f(x)>x$, de unde $f(f(x))>x$ şi de aici
$f(f(f(x)))>f(x)>x$, deci $f(f(f(x)))>x$, imposibil.
Rezultă deci că $f(x)=x, \forall x\in\mathbf{R}$, deci ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2^x-1=x$.
………………………2 puncte

Funcţia $f:\mathbf{R}\to(-1,\infty),\ f(x)=2^x-1$ este convexă, iar funcţia $g(x)=x$ este liniară.
Rezultă că ecuaţia $f(x)=g(x)$ are cel mult 2 soluţii.
Numerele 0 şi 1 verifică ecuaţia, deci $S=\{0,1\}$ ………………1 punct.

PROBLEMA 2

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2\sin 2x+8(\sin x+\cos x)+3$.

Determinaţi imaginea funcţiei f.

<u>Soluţie:</u>

Notăm $\sin x+\cos x=t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ şi prin ridicare la pătrat:
$1+\sin 2x=t^2$, de unde $\sin 2x=t^2-1$.
Rezultă că $f(x)=g(t)=2(t^2-1)+8t+3=2t^2+8t+1, t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

……………………………………………3 puncte

Avem: $g\left(-\sqrt{2}\right)=4-8\sqrt{2}+1=5-8\sqrt{2}$

$g\left(\sqrt{2}\right)=4+8\sqrt{2}+1=5+8\sqrt{2}$

Funcţia $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ h(x)=2x^2+8x+1$ are minimul $m=h\left(-\dfrac{8}{4}\right)=h(-2)=-7$ ...3 puncte

dar $-2\notin\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. Deci $\operatorname{Im} f=\left[5-8\sqrt{2},5+8\sqrt{2}\right]$ ……………………………1 punct

PROBLEMA 3

Fie $n\geq 2$ număr natural şi a,b două numere reale pozitive. Să se arate că $n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$.

<u>Soluţie:</u>

Scriem $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}$ de $(n-2)$ ori 1 ....*1 punct*

Din inegalitatea mediilor ($m_g\leq m_a$) avem

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\ldots\cdot 1}\leq\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+1+1+\ldots+1}{n}$ ....*3 puncte*

deci $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\ldots\cdot 1}\leq\dfrac{2\sqrt{a}+(n-2)}{n}$ ....*1 punct*

Aşadar $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\leq\dfrac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2(n-2)}{n}$ ....*1 punct* de unde obţinem

$n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$........................*1 punct*

PROBLEMA 4

Notăm cu M,N,P,Q,R şi S mijloacele segmentele $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ respectiv (NQ) dintr-un pentagon convex $ABCDE$. Arătaţi că $RS\parallel AB$.

<u>Soluţie:</u>

Fie $A(a),B(b),C(c),D(d)$ şi $E(e)$ afixele vârfurilor pentagonului.............*1 punct*

Cum M,N,P,Q,R şi S mijloacele segmentele $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ respectiv (NQ) atunci $M\left(\dfrac{c+b}{2}\right),N(\dfrac{d+c}{2}),P(\dfrac{e+d}{2}),Q(\dfrac{e+a}{2})$ ....*1,5 puncte* şi

$R\left(\dfrac{e+d+c+b}{4}\right),\mathrm{S}\left(\dfrac{\mathrm{e+a+d+c}}{4}\right)$...............................*1,5 puncte*

Pentru a demonstra că $RS \parallel AB$ verificăm dacă $\frac{b-a}{s-r} \in R^*$ unde $s = \frac{e+a+d+c}{4}$ şi $r = \frac{e+d+c+b}{4}$ ....*1 punct*

Prin calcul obţinem $\frac{b-a}{s-r} = \frac{b-a}{\frac{a-b}{4}} = -4 \in R^*$ ....*2 puncte* deci $RS \parallel AB$