Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VI-a

Problema 1..

a) Să se calculeze:

$$\left[2{,}1(6)+1\frac{1}{2}:0{,}(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{5}\right)^2-9\cdot 2014^0$$

b) Să se determine numerele naturale a şi b, pentru care sunt satisfăcute relaţiile: $(a,b)=15$ şi $a+b=240$.

Mirela Grigore, profesor, Galaţi

Problema 2.

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, iar M şi N două puncte pe dreapta BC astfel încât B să fie între M şi C, iar C între B şi N. Ştiind că $AM=AN$, să se demonstreze că:

a) $BM=CN$

b) $PN=QM$, unde P şi Q sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB],[AC]$

c) $PM=QN$

d) Dacă $MQ\cap NP=\{O\}$, să se arate că punctul O aparţine bisectoarei unghiului MAN.

Maricel Manea, profesor, Munteni

Problema 3

Fie numerele raţionale:

$$A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{2013}}+\frac{1}{2^{2014}}\right)\cdot\left(1+1+2+2^2+...+2^{2013}\right) \text{ şi}$$

$$B=\frac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+...+2^{2014}}-2$$

Să se calculeze $B+A-2^{2015}$.

Veronica Grigore, profesor, Galaţi

Problema 4

Determinaţi numerele prime p pentru care $p+2, p^2+4, p^3+2$ şi p^4-2 sunt simultan numere prime.

GM. Nr. 4/2013

Problemă selectată de Mirela Grigore, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.a	Transformările fracţiilor zecimale în fracţii ordinare: $2,1(6)=2\frac{15}{90}=2\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$ şi $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	1p
	$2,1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)=\frac{13}{6}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{40}{6}$	1p
	$\left(2-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$	1p
	Finalizare: $\frac{40}{6}\cdot\frac{36}{25}-9\cdot 1=\frac{3}{5}$	1p
1.b	$(a,b)=15 \Rightarrow$ există $x, y\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=15\cdot x,\ b=15\cdot y,\ (x,y)=1$ Din $a+b=240$ obţinem $15\cdot x+15\cdot y=240$	1p
	$x+y=16,\ (x,y)=1\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,15),(15,1),(3,13),(13,3),(5,11),(11,5),(7,9),(9,7)\}$	1p
	$(a,b)\in\{(15,225),(225,15),(45,195),(195,45),(75,165),(165,75)\}\cup$ $\cup\{(105,135),(135,105)\}$	1p
	a) Din $\Delta ABC\ isoscel \Rightarrow \sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ACB\Rightarrow\sphericalangle ABM\equiv\sphericalangle ACN$ $\Delta AMN\ isoscel\Rightarrow\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle ANC$ Conform cazului LUU $\Rightarrow\Delta AMB\equiv\Delta ANC\Rightarrow MB=NC$; $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle NAC$	2p
	b) Conform cazului LUL $\Rightarrow\Delta PNB\equiv\Delta QMC\Rightarrow PN=QM$; $\sphericalangle PNB\equiv\sphericalangle QMC$	2p

2	**c)** Conform cazului LUL $\Rightarrow \Delta MBP \equiv \Delta NCQ \Rightarrow MP = NQ$	2p
	d) $\sphericalangle PNB \equiv \sphericalangle QMC \Rightarrow \Delta MON\ isoscel \Rightarrow MO = NO$ Dar $OP = PN - ON$; $OQ = MQ - OM \Rightarrow OP = OQ$ Conform cazului LLL $\Rightarrow \Delta AOP \equiv \Delta AOQ \Rightarrow \sphericalangle PAO \equiv \sphericalangle QAO$ Dar şi $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO$	1p

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
3	Calculăm a doua paranteză din A: $1+1+2+2^2+...+2^{2013}=(2+2)+2^2+...+2^{2013}=\left(2^2+2^2\right)+2^3+...+2^{2013}=$ $=...=2^{2013}+2^{2013}=2^{2014}$	2p
	Aducând în prima paranteză la acelaşi numitor avem: $A=\dfrac{2^{2014}+2^{2013}+...+2+1}{2^{2014}}\cdot 2^{2014}=$ $=2^{2015}-1$	2p
	$B=\dfrac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+...+2^{2014}}-2;$ Fie S=$2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1$ Atunci $2\cdot$S=$2^{2016}+2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2 \Rightarrow$ $2\cdot$S=$2^{2016}+S+1 \Rightarrow S=2^{2016}-1\ (1)$ Fie T=$1+2^2+2^4+...+2^{2014}$ Atunci 4T=$2^2+2^4+...+2^{2014}+2^{2016} \Rightarrow$ $4T=2^{2016}+T-1 \Rightarrow 3T=2^{2016}-1 \Rightarrow T=\dfrac{2^{2016}-1}{3}\ (2)$ $B=\dfrac{2^{2016}-1}{\dfrac{2^{2016}-1}{3}}-2=3-2=1;$	2p
	Finalizare: $B+A-2^{2015}=0.$	1p
	Pentru $p=2$ avem $p+2=4$, care nu este număr prim.	

4	Pentru $p=3$ avem numerele 5, 13, 29 şi 79, care sunt, toate, numere prime.	2p
	Pentru $p=5$ avem numărul $p^4-2=623$, care se divide cu 7.	1p
	Demonstrăm că pentru $p>5$, număr prim, nu toate cele patru numere sunt prime. Dacă $p>5$, atunci $p=5\cdot k+1$, $p=5\cdot k+2$, $p=5\cdot k+3$ sau $p=5\cdot k+4$, $k\geq 1$ ($p=5\cdot k$, $k>1$, nu sunt numere prime). Dacă $p=5\cdot k+1$, atunci $p^2+4=(5\cdot k+1)^2+4=\mathrm{M}_5+1+4=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+2$, atunci $p^3+2=(5\cdot k+2)^3+2=\mathrm{M}_5+2^3+2=\mathrm{M}_5+10=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+3$, atunci $p+2=5\cdot k+3+2=\mathrm{M}_5+5=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+4$,atunci $p^2+4=(5\cdot k+4)^2+4=\mathrm{M}_5+4^2+4=\mathrm{M}_5+20=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim. Singura soluţie este $p=3$.	1p