OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 februarie 2013

Clasa a VI-a

SUBIECTUL I (7p)

a) Arătați că $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{2011\cdot 2013}<\frac{1}{2}$;

b) Calculați produsul numerelor A și B unde:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{1}{2012}\right)$$

$$B=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right).$$

SUBIECTUL II (7p)

Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D, E, F, în această ordine astfel încât $AB=BC$, $BD=DE$, $CE=EF$ și $AF=48cm$.

a) Calculați lungimea segmentului $[DE]$.

b) Dacă în plus, mijlocul lui $[DE]$ coincide cu mijlocul lui $[AF]$, calculați lungimile segmentelor $[AB]$ și $[EF]$.

SUBIECTUL III (7p)

Aflați numerele naturale a și b știind că $[a,b]$ este de 15 ori mai mare decât (a,b) și $5a+3b=150$. Am notat cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL IV (7p)

Se consideră un triunghi isoscel ΔABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $m(\sphericalangle A)>90°$. Notăm cu M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[AC]$.

a) Arătați că $[CM]\equiv[BN]$

b) Perpendiculara în M pe dreapta CM intersectează dreapta AC în E, iar perpendiculara în N pe BN intersectează dreapta AB în F. Demonstrați că triunghiul ΔAFE este un triunghi isoscel.

Subiecte selectate și prelucrate de prof. Ioan Ciobanașu și prof. Gabriel Jîjîie

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru: 2 ore**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2013

Clasa a VI-a

Barem de corectare

<u>Subiectul I (7p)</u>

a) Arătaţi că $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ ...\ +\frac{1}{2011\cdot 2013}<\frac{1}{2}$;

b) Calculaţi produsul numerelor A şi B unde:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{2012}\right)$$

$$B=\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right).$$

<u>Soluţie:</u>

a) $2S=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ ...\ +\frac{2}{2011\cdot 2013}$ 1p

$2S=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2013}$ 2p

Finalizare $S=\frac{1006}{2013}<\frac{1}{2}$ 1p

b) $A\cdot B=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot....\cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right)$ 1p

$A\cdot B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot...\cdot\frac{2012}{2013}$ 1p

Finalizare $A\cdot B=\frac{1}{2013}$ 1p

<u>Subiectul II (7p)</u>

Pe dreapta d se consideră punctele A, B, C, D, E, F, în această ordine astfel încât , $AB=BC$, $BD=DE$, $CE=EF$ şi $AF=48cm$.

a) Calculaţi lungimea segmentului $[DE]$.

b) Dacă în plus, mijlocul lui $[DE]$ coincide cu mijlocul lui $[AF]$, calculaţi lungimile segmentelor $[AB]$ şi $[EF]$.

<u>Soluţie:</u>

a) Dacă $AB = x$ şi $CD = y$ atunci $DE = x + y$ 1p

$AF = 48 \Rightarrow 4x + 4y = 48$ 2p

Finalizare: $DE = 12cm$ 1p

b) M mijlocul lui $[DE]$ şi $[AF]$ obţinem $AD = EF = 18$ 1p

$AD = EF \Rightarrow 2x + y = x + 2y \Rightarrow x = y$ 1p

Finalizare $AB = x = 6cm$ 1p

Subiectul III (7p)

Aflaţi numerele naturale *a* şi *b* ştiind că $[a,b]$ este de 15 ori mai mare decât (a,b) şi $5a + 3b = 150$.

Am notat cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun şi cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor *a* şi *b*.

Soluţie:

$(a,b) = d$ atunci $a = d \cdot x,\ b = d \cdot y,\ x, y \in \mathbb{N}$ cu $(x, y) = 1$ 1p

Din $a \cdot b = (a,b) \cdot [a,b]$ şi $[a,b] = 15 \cdot d$ obţinem $d \cdot x \cdot d \cdot y = 15 \cdot d^2$ 2p

$x \cdot y = 15 \Rightarrow (x, y) \in \{(1,5),(15,1),(3,5),(5,3)\}$ 1p

Prin înlocuire în relaţia $5a + 3b = 150$ obţinem $d \in \{3,5\}$ 2p

Finalizare $(a,b) \in \{(3,45),(15,25)\}$ 1p

Subiectul IV (7p)

Se consideră un triunghi isoscel $\triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\angle A) > 90^0$. Notăm cu *M* şi *N* mijloacele laturilor $[AB]$ şi respectiv $[AC]$.

a) Arătaţi că $[CM] \equiv [BN]$

b)Perpendiculara în *M* pe dreapta *CM* intersectează dreapta *AC* în *E* iar perpendiculara în *N* pe *BN* intersectează dreapta *AB* în *F*. Demonstraţi că triunghiul $\triangle AFE$ este un triunghi isoscel.

Soluţie:

a) $\triangle AMC \equiv \triangle ANB$ 2p

Finalizare: $[CM] \equiv [BN]$ 1p

b) $\triangle AMC \equiv \triangle ANB \Rightarrow \angle MCA \equiv \angle NBA$ 1p

$\triangle EMC \equiv \triangle FMB \Rightarrow [BF] \equiv [CE]$ 2p

Finalizare: $[AF] \equiv [AE] \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel 1p

Notă: Orice altă soluţie corectă va fi notată corespunzător.