

BAREME-SOLUȚII-PROBLEME
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-CLASA a VI-a-
21 FEBRUARIE 2016

1.

- a) $\overline{xyz} = 15c_1 + r, r < 15$ și $\overline{xy\bar{z}} = 25c_1 + r, r < 25$ 1p
 $\overline{xyz} - r \in M_{15} \cap M_{25}$ 1p
 $[15,25] = 75 \Rightarrow \overline{xyz} - r \in M_{75}$1p
 $\overline{xyz} = 975 + r_{\max} = 975 + 14 = 989$1p
b) Numărătorul și numitorul trebuie să se dividă cu 5 și cu 9.....1p
Pentru numărător se obțin valorile 3780 și 3285, iar pentru numitor 1170 și 1575.....1p
Înseamnă că, cea mai mare fracție este $\frac{3780}{1170}$, iar cea mai mică este $\frac{3285}{1575}$ 1p
Total.....7p

2. a)

- $2a + 5b = 3c \Rightarrow 5(a + b) = 3(a + c) \Rightarrow 5|(a + c)$ și $3|(a + b)$1p
 $2a + 5b = 3c \Rightarrow 2(a + 4b) = 3(b + c) \Rightarrow 2|(b + c)$1p
 $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \Rightarrow 30|(a + b)(b + c)(a + c)$1p
b)

Dacă S este suma celor șapte numere și x și y două numere dintre acestea, din S - x și S - y divizibile cu 7, rezultă că (S - x) - (S - y) = y - x este divizibil cu 7.....2p
Cele șapte numere dau același rest r la împărțirea cu 7.....1p
Suma a șase numere dintre ele va fi de forma 7k + 6r, care este multiplu de 7 numai pentru r = 0, deci cele șapte numere sunt multipli de 7.....1p
Total.....7p

- 3.i) Demonstrarea faptului că unghiurile nu pot fi adiacente.....3p
ii) Unghiurile nu sunt adiacente. Se obțin măsurile 65° și 25°.....4p
Total.....7p

- 4.a) $M_1M_2 = 4cm, M_2M_3 = 4^2cm, M_3M_4 = 4^3cm, \dots, M_{2015}M_{2016} = 4^{2015}cm$1p
 $M_1M_{2016} = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_{2015}M_{2016} = \frac{4^{2016}-4}{3}cm$1p

- b) $M_1M_{100} = \frac{4^{100}-4}{3}cm, M_{100}M_{150} = \frac{4^{150}-4^{100}}{3}cm$1p
 $4^{100} - 4 < 4^{150} - 4^{100}$ deoarece $2^{300} - 2^{201} + 4 > 0$. Rezultă $M_1M_{100} < M_{100}M_{150}$1p

- c) Demonstrăm prin reducere la absurd.
Presupunem că există numerele naturale a, b, c, d cu $1 \leq a < b \leq c < d \leq 2016$ astfel încât $M_aM_b = M_cM_d$, rezultă $4^b - 4^a = 4^d - 4^c$ 1p
Împărțim prin 4^a obținem $4^{b-a} - 1 = 4^{d-a} - 4^{c-a}$, imposibil, deoarece membrul stâng este un număr impar, iar membrul drept este un număr par, deci presupunerea făcută este falsă...2p
Total.....7p