Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

CLASA A X-A

Problema 1:

a) Arătaţi că: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{1}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}, \quad \forall a,b,c>0$.

b) Detereminaţi numerele $x,y\in(1,\infty)$ pentru care

$$\log_{2y}x+\lg y+\log_{5x}2+\log_{xy}5=2$$

Gazeta Matematică 5 / 2012

Problema 2:

Arătaţi că, dacă $x,y,z\in(0,\infty)$ şi $xyz=1$, atunci: $\frac{1+xy}{1+z}+\frac{1+yz}{1+x}+\frac{1+xz}{1+y}\geq 3$.

RMCS 41

Problema 3:

Fie $a,b,c,d\in\mathbb{C}^*$ afixele vârfurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care $a\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot c$, $b\cdot\overline{d}=\overline{b}\cdot d$ şi $a+b+c+d=0$. Arătaţi că $ABCD$ este paralelogram.

RMCS 38

Problema 4:

Determinaţi funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$f\left(\frac{x}{3}\right)+2\leq\log_3 x\leq g(x)-1$ şi $g\left(\frac{x}{3}\right)\leq\log_3 x\leq f(x)+1$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

Gazeta Matematică 4 / 2012

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore
Fiecare problemă se punctează cu 7 puncte.

Olimpiada de matematică
Etapa locală, Caraş-Severin, 16.02.2013

Clasa a X-a
BAREME

Problema 1:

Aplică Cauchy Schwarz $\frac{a^2}{ab+a}+\frac{b^2}{bc+b}+\frac{1^2}{c+a}+\frac{c^2}{ac+cb}\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$ 1pct

Egalitatea se scrie $\frac{\log_2 x}{1+\log_2 y}+\frac{\log_2 y}{1+\log_2 5}+\frac{1}{\log_2 5+\log_2 x}+\frac{\log_2 5}{\log_2 x+\log_2 y}=2$ 1pct

Notăm şi obţinem $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{1}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2$ 1pct

Aplică a) şi obţine $2\geq\frac{(a+b+c+1)^2}{2bc+ab+ac+2a+b+c}$ ....1 pct

Ceea ce este echivalent cu $(a-1)^2+(b-c)^2\leq 0$ 2pct

Obţine $a=1$ şi $b=c$, apoi $x=2$ şi $y=5$ 1pct

Problema 2:

Scrie cum forma $S=\sum\frac{1+\frac{1}{z}}{1+z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ 3pct

Foloseşte inegalitatea mediilor şi obţine $S\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3$ 4pct

Problema 3:

Foloseşte ipoteza şi obţine $\frac{a}{c}=\overline{\left(\frac{a}{c}\right)}$, deci $\frac{a}{c}\in\mathbb{R}\Rightarrow A,C,O$ coliniare..1pct

Analog obţine că B,D,O coliniare, deci O este intersecţia diagonalelor patrulaterului $ABCD$. 1pct

Deduce $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ are direcţia diagonalei AC, iar suma $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ are direcţia diagonalei BD ……………..1pct

Egalitatea $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ este posibilă dacă $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, ……………………………2pct

Deduce că O -mij fiecărei diagonale, aşadar $ABCD$ este paralelogram.…………………………………….2pct

Problema 4:

Inlocuieste x cu $3x$ şi obţine $f(x)\leq\log_3 x-1$, $g(x)\leq\log_3 x+1$ 2pct

Observă că $f(x)\geq\log_3 x-1$ şi $g(x)\geq\log_3 x+1$, $\forall x\in(0,\infty)$ 3pct

Obţine că $f(x)=\log_3 x-1$ şi $g(x)=\log_3 x+1$ 2pct