OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a IX– a

BAREM

1.a) Pentru $x = y = z = 1 \Rightarrow m \geq 3$ ………………………………………………….. (1p)

Demonstreaza ca $m = 3$ convine,deci $m = 3$ e numarul cautat ....(2p)

b) Cum $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow (5-t)^2 \leq 3(43-t^2)$, ...(1p)

deci $4t^2 - 10t - 104 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-4, \frac{13}{2}\right]$ si t este minim,vom verifica daca $t = -4$ ne convine.(1p)

Pentru $t = -4$ avem ca $x^2 + y^2 + z^2 = 3(x+y+z) = 27$, de unde $x = y = z = 3$ este unica solutie

Asadar,solutia problemei este data de $x = y = z = 3, t = -4$. (2p)

2. a) Avem ca $a_{n+2} = (n+4)(n+6)(n+8)\cdot\ldots\cdot 3n(3n+2)(3n+4)(3n+6) =$ (1p)

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}\cdot(3n+2)(3n+4)(3n+6) = 3a_n(3n+2)(3n+4),$$ (2p)

de unde se obtine concluzia.

b) Vom folosi metoda inductiei matematice.Avem:

$a_1 = 3 \vdots 3, a_2 = 4\cdot 6 \vdots 3, a_3 = 5\cdot 7\cdot 9 \vdots 3^2, a_4 = 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12 \vdots 3^2.$ (1p)

Presupunem ca $a_{2k-1} \vdots 3^k$ si $a_{2k} \vdots 3^k, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci rezulta ca:

$a_{2k+1} = 3a_{2k-1}\cdot(6k-1)(6k+1) \vdots 3^{k+1}$ si $a_{2k+2} = 3a_{2k}\cdot(6k+2)(6k+4) \vdots 3^{k+1}$. (2p)

Finalizare. (1p)

3.a) Scrie teorema bisectoarei . (1p)

Deduce relatia ceruta (1p)

b) "$\Leftarrow$" Din ΔABC echilateral $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ si analoagele. (1p)

Stabileste relatia ceruta (1p)

"$\Rightarrow$" Relatia $\sum \overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} - 1\right) + \overrightarrow{AC}\left(\frac{c}{b+c} + \frac{c}{c+a} - 1\right) = \vec{0}$ (1p)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{b+c}+\dfrac{b}{a+b}-1=0 \\ \dfrac{c}{b+c}+\dfrac{c}{a+c}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=ac \\ c^2=ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3=abc \\ c^3=abc \end{cases} \Rightarrow b=c, b=a \Rightarrow \Delta ABC \text{ echilateral} \qquad (2p)$$

4. Avem $a^2-2b=a^2-\dfrac{a^2-c^2}{2}=\dfrac{a^2+c^2}{2}=$ (2p)

$=\dfrac{(a+c)^2+(a-c)^2}{4}=$ (2p)

$=\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2$ (*) (1p)

Din $a^2=c^2+4b \Rightarrow$ a si c au aceeasi paritate (1p)

Atunci $\dfrac{a+c}{2},\dfrac{a-c}{2}\in\mathbb{Z}$ si folosind (*) se obtine concluzia. (1p)

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN MARAMUREŞ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a IX– a

1. a) Să se determine cel mai mic numar real m știind că $(x+y+z)^2 \le m(x^2+y^2+z^2), \forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine numerele reale x,y,z,t știind că $x+y+z+t=5$ și $x^2+y^2+z^2+t^2=43$, iar t este minim.

Gheorghe Boroica

2. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_n=(n+2)\cdot(n+4)\cdot(n+6)\cdot\ldots\cdot 3n$.

a) Să se arate ca a_n divide pe a_{n+2}, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că $3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ divide pe a_n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3. Fie triunghiul ABC și A',B',C' picioarele bisectoarelor din A,B respectiv C.

a) Să se arate că $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, unde $b=AC, c=AB$.

b) Să se arate că $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0} \Leftrightarrow \Delta ABC$ este echilateral .

4. Fie a,b,c numere întregi, cu $a^2-4b=c^2$. Să se arate că numărul a^2-2b se scrie ca sumă de două pătrate perfecte .

G.M 9/2012

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de către:

prof. Boroica Gheorghe, Colegiul Naţional „Gheorghe Sincai”, Baia Mare.
prof. Zlampareț Horia, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu”, Baia Mare.

SUCCES!