Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a III - a

Subiecte

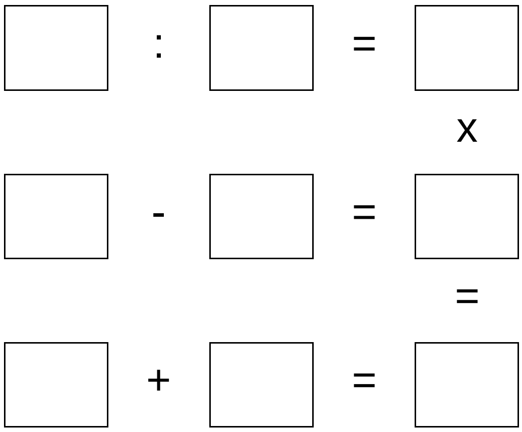
1. Calculaţi:

a) (4p) $a=\left[\left(406:2+405:9\right)-\left(240:6+680:10\right)\right]\times 3:5$

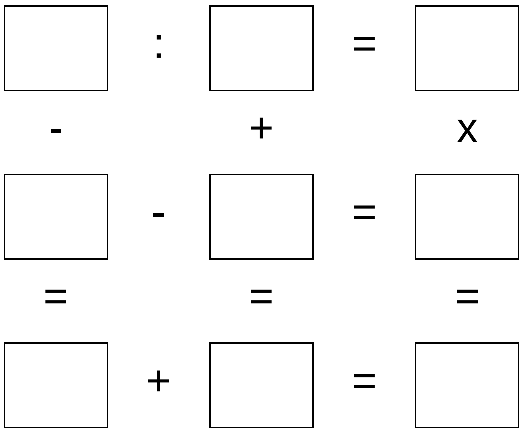
b) (3p) $b=3:3+6:3+9:3+12:3+15:3+18:3+\cdots+54:3+57:3+60:3$

2. (7p) Suma a patru numere este 924. Primul şi al doilea, respectiv al treilea şi al patrulea sunt numere consecutive, iar diferenţa dintre al doilea şi al treilea este 100. Aflaţi cele patru numere.

3. (4p) a) Scrie în pătrăţele numere de la 1 la 30, diferite, astfel încât relaţiile matematice să fie adevărate (găseşte 2 soluţii):



(3p) b) Scrie în pătrăţele numere de la 1 la 40, astfel încât relaţiile matematice să fie adevărate (găseşte 1 soluţie):



4. (5p+2p) Dacă ar exista monede de 3 lei şi de 5 lei am putea plăti suma de 100 de lei cu exact 24 de monede? Dar cu 25 de monede? Justificaţi răspunsul.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a III- a

Barem de corectare

1. a)

$$a=\left[(406:2+405:9)-(240:6+680:10)\right]\times 3:5 \overset{(1p)}{=} \left[(203+45)-(40+68)\right]\times 3:5 \overset{(1p)}{=}$$

$$\overset{(1p)}{=} (248-108)\times 3:5 \overset{(1p)}{=} 140\times 3:5 \overset{(0,5p)}{=} 420:5 \overset{(0,5p)}{=} 84.$$

b) $b=3:3+6:3+9:3+12:3+15:3+18:3+\cdots+54:3+57:3+60:3 \overset{(0,5p)}{=}$

$$\overset{(0,5p)}{=} 1+2+3+\cdots+18+19+20 \overset{(1p)}{=} (1+20)+(2+19)+(3+18)+\cdots+(10+11) \overset{(0,5p)}{=}$$

$$\overset{(0,5p)}{=} \underbrace{21+21+21+\cdots+21}_{de 10 ori} \overset{(0,5p)}{=} 21\times 10 \overset{(0,5p)}{=} 210.$$

Se acordă punctaj maxim și pentru calculul efectiv sau orice alt raționament corect.

2. Notăm cu a cel de-al treilea număr. **(0,5p)**
Cel de-al patrulea va fi $a+1$ **(0,5p)**
Cel de-al doilea va fi $a+100$ **(0,5p)**
Primul număr va fi $a+99$ **(0,5p)**
Suma lor este egală cu 924 implică: $4\times a+200=924$ **(1p)**
Rezultă $4\times a=724$ **(1p)**
De unde $a=181$ **(0,5p)**
Primul număr este: $181+99=280$; Al doilea număr este: $181+100=281$ **(1p)**
Al treilea număr este : 181 ; Al patrulea număr este: $181+1=182$ **(1p)**
Numerele căutate sunt: 280, 281, 181, 182. **(0,5p)**

3. a) Numerele trebuie să fie diferite!

30	:	3	=	10
				x
11	-	9	=	2
				=
15	+	5	=	20

(2p)

10	:	2	=	5
				x
7	-	4	=	3
				=
9	+	6	=	15

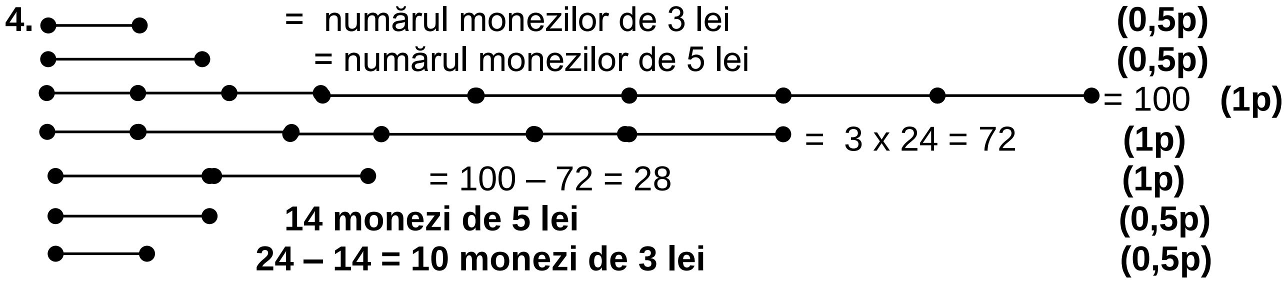
(2p)

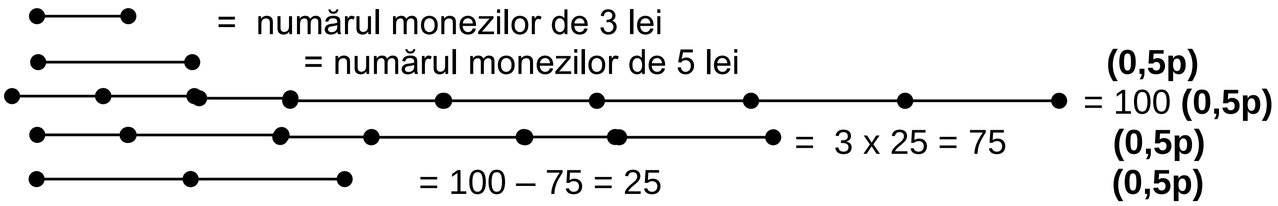
b) Numerele nu sunt neapărat diferite!

12	:	6	=	2
-		+		x
8	-	2	=	6
=		=		=
4	+	8	=	12

(3p)

4.





Dublul numărului monezilor de 5 lei **nu** poate fi egal cu 25!

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a IV - a

Subiecte

1. (7p) După ce au trecut cu bine proba ospăţului, Împăratul Roş îi chemă la el şi le spuse:

- Văd că v-aţi descurcat bine cu mâncarea. Aţi avut noroc cu nesătulul ăsta care a mâncat bucate cât pentru o nuntă. Acu să vă văd! Veţi scoate vinul din butoaie în amfore şi carafe, ştiind că în 14 amfore şi 15 carafe pline aveţi 400 litri de vin, iar în 6 amfore şi 10 carafe încap 200 litri. Voi trebuie să scoateţi 500 litri de vin folosind în total 37 amfore şi carafe. Dacă nu faceţi întocmai cum v-am spus şi nu veţi bea tot vinul scos ştiţi voi ce vă aşteaptă!

Şi în timp ce Setilă îşi lingea buzele şi înghiţea în sec gândindu-se la vin, Harap Alb scoase din buzunar o hârtie şi un creion şi începu să rezolve.

Încercaţi şi voi să rezolvaţi problema. Determinaţi câte amfore şi câte carafe au fost folosite.

(Maria şi Toader Rotari „*Poveşti cu… probleme*”)

2. a) (4p) Dacă $m+n$ este cel mai mic număr de 4 cifre distincte, iar p este cel mai mare număr impar de două cifre distincte, calculaţi: $3m+3n-7p$.

b) (3p) Aflaţi cifrele a şi b ştiind că: $\overline{ab3b}+\overline{a4b}+\overline{ba}+8\cdot b+4\cdot a=2015$.

3. (7p) Fie şirul de numere $n+6,\ n+7, n+8, n+9, \ldots$ în care suma primilor 5 termeni este 475. Aflaţi primii 5 termeni ai şirului şi calculaţi suma primilor 21 termeni.

4. (7p) Dan şi Sonia au împreună 20 de ani. În urmă cu 5 ani vârsta lui Dan era de patru ori mai mică decât vârsta Soniei. Ce vârstă are Sonia?

(Doina Stoica şi Mircea Stoica, Arad, GMB 9 / 2015)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a IV - a
Barem de corectare

1. Dacă 14 amfore+15 carafe = 400 litri atunci 28 amfore + 30 carafe = 800 litri **(1p)**
Dacă 6 amfore + 10 carafe = 200 litri atunci 18 amfore + 30 carafe = 600 litri **(1p)**
Rezultă că 10 amfore conţin 200 litri, adică **o amforă** are **20 litri** **(1p)**
6 amfore vor avea 120 litri, deci 10 carafe conţin 80 litri, adică **o carafă** are **8 litri** **(1p)**
Dacă toate cele 37 vase ar fi carafe s-ar scoate 37 x 8 = 296 litri **(0,5p)**
Diferenţa de 500 - 296 = 204 litri trebuie să se regăsească în amfore. **(0,5p)**
Diferenţa dintre o amforă şi o carafă este de 20 - 8 = 12 litri **(0,5p)**
Deci vor fi atâtea **amfore** de câte ori se cuprinde 12 în 204, adică 204 : 12 = **17** **(1p)**
Restul de 37 – 17 = **20** vase vor fi **carafe**. **(0,5p)**

2. a) Cel mai mic număr de 4 cifre distincte este $1023 \Rightarrow m+n=1023$ **(1p)**
Cel mai mare număr impar de două cifre distincte este $97 \Rightarrow p=97$ **(1p)**
Atunci: $3m+3n-7p \overset{(0,5p)}{=} 3(m+n)-7p \overset{(0,5p)}{=} 3\times1023-7\times97 \overset{(0,5p)}{=} 3069-679 \overset{(0,5p)}{=} 2390$

b) $\overline{ab3b}+\overline{a4b}+\overline{ba}+8\cdot b+4\cdot a=2015 \overset{(1p)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1p)}{\Leftrightarrow} 1000\cdot a+100\cdot b+30+b+100\cdot a+40+b+10\cdot b+a+8\cdot b+4\cdot a=2015 \overset{(0,5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(0,5p)}{\Leftrightarrow} 1105\cdot a+120\cdot b+70=2015 \overset{(0,5p)}{\Leftrightarrow} 1105\cdot a+120\cdot b=1945 \overset{(0,5p)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=1 \\ 120\cdot b=840 \end{cases} \overset{(0,5p)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=1 \\ b=7 \end{cases}$$

3. $n+6+n+7+n+8+n+9+n+10=475 \Leftrightarrow 5\cdot n+40=475 \Leftrightarrow 5\cdot n=435 \Leftrightarrow n=87$ **(2p)**
Primii 5 termeni ai şirului sunt: 93, 94, 95, 96, 97. **(2,5p)**

$$S=93+94+95+\cdots+111+112+113=(93+113)+(94+112)+(95+111)+\cdots+(102+104)+103=$$

$$=\underbrace{206+206+206+\cdots+206}_{de 10 ori}+103=2060+103=2163$$ **(2,5p)**

4. Fie d şi s vârsta lui Dan, respectiv a Soniei din urmă cu 5 ani. **(1p)**
Rezultă $s=4\cdot d$ **(1p)**
Acum Dan şi Sonia au vârstele: $d+5$ şi $s+5$ **(1p)**
Avem: $s+5+d+5=20 \Leftrightarrow s+d=10 \Leftrightarrow 4\cdot d+d=10 \Leftrightarrow 5d=10 \Leftrightarrow d=2$ şi $s=8$. **(3p)**
Acum Sonia are $8+5=13$ ani. **(1p)**

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a V- a

Subiecte

1. (7p) Când Verde Împărat lăudă salatele din Grădina ursului, Spânul chemă la el pe Harap Alb şi-i porunci:

- Să aduci degrabă din Grădina ursului salate din acestea!

Arap Alb întrebă:

- Câte să aduc, stăpâne?

Atunci împăratul, care voia să vadă cât de isteţ este nepotul său îi spuse Spânului:

- Socoate singur, nepoate. Voi avea atâţia invitaţi încât dacă se aşază câte 12 la o masă rămân 12 mese libere, iar dacă se aşază câte 8 la o masă rămân 176 în picioare. Apoi, mai vreau să ştii că sunt cu 50 femei mai multe decât bărbaţi şi un bărbat consumă 3 salate, iar o femeie doar 2. Ei, ce zici, de câte salate avem nevoie?

Spânul, căruia îi plăcea matematica mai ceva ca sarea-n ochi se întoarse spre Harap Alb şi-i şopti printre dinţi:

- Socoate repede şi spune-mi la ureche rezultatul corect că de nu, unde-ţi stau picioarele acolo îţi va sta capul!

Şi în timp ce Spânul se prefăcea preocupat de rezolvare, Harap Alb scoase din buzunar o hârtie şi un creion şi începu să rezolve.

Încercaţi şi voi să rezolvaţi problema. Câte salate sunt necesare?

(Prelucrare după Maria şi Toader Rotari „*Poveşti cu… probleme*”)

2. (7p) Aflaţi cifrele a, b, c, d, e ştiind că are loc egalitatea:

$$\overline{abcde3} = 217071 + \overline{3abcde}.$$

(Prof. Monica Sas, Năsăud)

3. (3p) a) Calculaţi $S = u + v$, unde $u = 3^7$, $v = 2^{11}$.

(4p) b) Comparaţi numerele $a = 2^{2015}$ şi $b = 3^{1343}$.

4. (7p) Determinaţi toate numerele naturale n care îndeplinesc simultan condiţiile:

a) dacă se împarte n la 3, restul împărţirii este r_1.

b) dacă se împarte n la 5, restul împărţirii este r_2.

c) dacă se împarte n la 7, restul împărţirii este r_3.

d) suma câturilor celor trei împărţiri este mai mare cu 341 decât suma resturilor.

e) r_1 este număr prim, $r_3 = 2r_1$, iar $r_1 = (r_2 + r_3) : 2$

(*Gheorghe Ţucă*, Alexandria, GMB 3 / 2015)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a V - a

Barem de corectare

1. Determinarea numărului de mese (80 mese)…………………………………………… 3p
Determinarea numărului de invitaţi (816 invitaţi) ………………………………………. 1p
Determinarea numărului de bărbaţi (383 bărbaţi) şi de femei (433 femei) ………….... 2p
Determinarea numărului necesar de salate (2015 bucăţi) ……………………………..1p

Soluţia 1 (algebrică). Fie $m=$ numărul de mese. Atunci:

$$8m+176=12(m-4)\ \textbf{(1p)}\ \Leftrightarrow 4m=320\ \textbf{(1p)}\ \Leftrightarrow m=80\ \textbf{(1p)}$$

Fie $I=$ numărul de invitaţi. Atunci: $I=8\times 80+176=816$ invitaţi **(1p)**

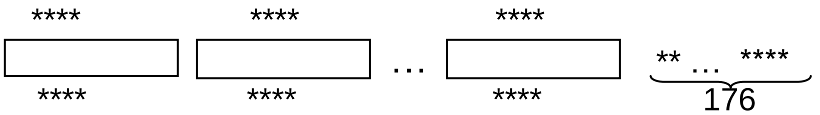
Fie $b=$ numărul de bărbaţi şi $f=$ numărul de femei. Atunci: $b+f=816$ şi $f=b+50$ **(1p)**

Rezultă $b=383$ şi $f=433$ **(1p)**.

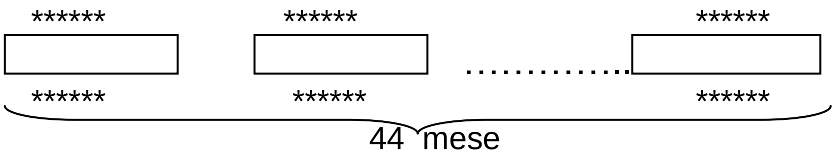
Numărul necesar de salate este $S=383\times 3+433\times 2=1149+866=2015$ salate **(1p)**

Soluţia 2 (aritmetică).

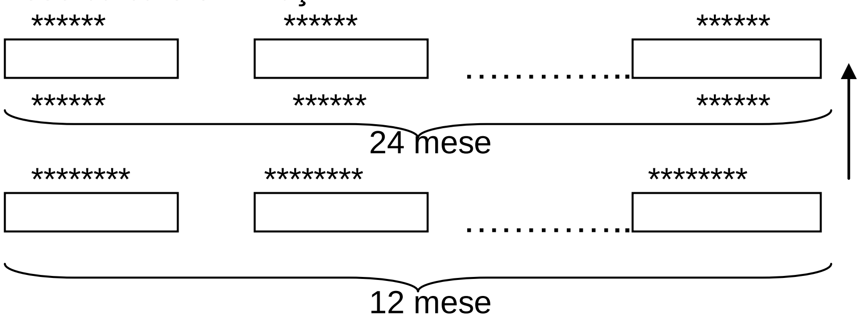
Aşezăm mai întâi câte 8 la o masă şi rămân 176.



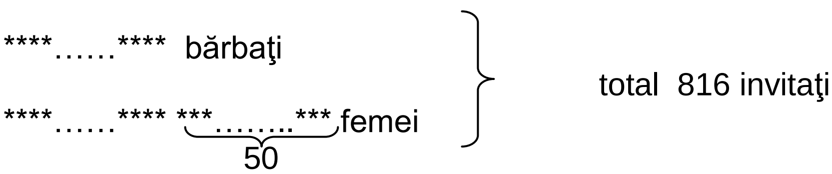
Din cei 176 vom adăuga câte 4 la 176 : 4 = 44 mese.



Vom elibera 12 mese de câte 8, adică 96 de invitaţi şi-i vom adăuga câte 4 la alte 24 mese cu câte 8 invitaţi.



Vor fi 44+24 = 68 mese cu câte 12 invitaţi şi 12 mese libere. În total sunt 68 x 12 = 816 invitaţi. Din aceştia sunt:



Dacă scădem din 816 invitaţi 50 femei rămân 816 - 50 = 766 invitaţi cu un număr de femei egal cu cel al bărbaţilor. Sunt deci 766 : 2 = 383 bărbaţi şi 383 + 50 = 433 femei.

Vor fi necesare 383 x 3 + 433 x 2 = 1149 + 866 = 2015 salate.

2. $\begin{array}{l}\overline{3abcde}+\\ \underline{217071}\\ \overline{abcde3}\end{array}$ $\quad 1+e=3 \; sau \; 1+e=13 \overset{e-cifră}{\Rightarrow} e=2$ **(1,5p)**

$\begin{array}{l}\overline{3abcd2}+\\ \underline{217071}\\ \overline{abcd23}\end{array}$ $\quad 7+d=2 \; sau \; 7+d=12 \overset{d-cifră}{\Rightarrow} d=5$ **(1,5p)**

$\begin{array}{l}\overline{3abc52}+\\ \underline{217071}\\ \overline{abc523}\end{array}$ $\quad 1+0+c=5 \; sau \; 1+0+c=15 \overset{c-cifră}{\Rightarrow} c=4$ **(1,5p)**

$\begin{array}{l}\overline{3ab452}+\\ \underline{217071}\\ \overline{ab4523}\end{array}$ $\quad 7+b=4 \; sau \; 7+b=14 \overset{b-cifră}{\Rightarrow} b=7$ **(1p)**

$\begin{array}{l}\overline{3a7452}+\\ \underline{217071}\\ \overline{a74523}\end{array}$ $\quad 1+1+a=7 \; sau \; 1+1+a=17 \overset{a-cifră}{\Rightarrow} a=5$ **(1p)**

$\begin{array}{l}\overline{357452}+\\ \underline{217071}\\ 574523\end{array}$ $\quad adevărat \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=7 \\ c=4 \\ d=5 \\ e=2 \end{cases}$ **(0,5p)**

3. a) $u=3^7=9\times9\times9\times3=729\times3=2187$ **(1p)**

$v=2^{11}=2^{10}\times2=1024\times2=2048$ **(1p)**

$u+v=2187+2048=4235$ **(1p)**

b)

$$\left.\begin{array}{l} a=2^{2015}=2^{2004+11}=2^{2004}\cdot2^{11}=2^{3\times668}\cdot2^{11}=\left(2^3\right)^{668}\cdot2^{11}=8^{668}\cdot2048 \qquad (1p) \\ b=3^{1343}=3^{1336+7}=3^{1336}\cdot3^7=3^{2\times668}\cdot3^7=\left(3^2\right)^{668}\cdot3^7=9^{668}\cdot2187 \qquad (1p) \\ \left.\begin{array}{l} 8<9\Rightarrow 8^{668}<9^{668} \qquad (0,5p) \\ 2048<2187 \qquad (0,5p) \end{array}\right\}\Rightarrow 8^{668}\cdot2048<9^{668}\cdot2187 \qquad (0,5p) \end{array}\right\}\Rightarrow a<b \qquad (0,5p)$$

4.

$n=3c_1+r_1\;,\;0\le r_1<3\;;\;n=5c_2+r_2\;,\;0\le r_2<5\;;\;n=7c_3+r_3\;,\;0\le r_3<7$ **(1,5p)**

$\left.\begin{array}{l} r_1-nr.prim \\ 0\le r_1<3 \end{array}\right\}\Rightarrow r_1=2\;;\;\left.\begin{array}{l} r_3=2r_1 \\ r_1=2 \end{array}\right\}\Rightarrow r_3=4\;;\; r_1\; m.a.\; r_2,\, r_3\Rightarrow 2=\dfrac{r_2+4}{2}\Rightarrow r_2=0$ **(1,5p)**

$c_1+c_2+c_3=341+r_1+r_2+r_2\Rightarrow c_1+c_2+c_3=347$ **(1p)**

$$\left.\begin{array}{l} n = 3c_1 + 2 \,/\cdot 5\cdot 7 \rightarrow 35n = 105c_1 + 70 \\ n = 5c_2 \quad /\cdot 3\cdot 7 \rightarrow 21n = 105c_2 \\ n = 7c_3 + 4 \,/\cdot 3\cdot 5 \rightarrow 15n = 105c_3 + 60 \end{array}\right\}$$ **(2 p)**

$$\rightarrow 71n = 105\left(c_1 + c_2 + c_3\right) + 130 \rightarrow 71n = 105\cdot 34 + 130$$

$$\rightarrow n = 515$$

(1 p)

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de Matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII- a, 30 octombrie– 1 noiembrie 2015

Clasa a VI- a

(7p) 1. Arătaţi că numărul $a = 15 + 3^{2014}$ se divide cu 24.

(7p) 2. a. Să se determine numărul natural n care are exact trei divizori şi suma divizorilor este 307

b. Să se determine numărul natural m care are exact patru divizori şi suma divizorilor este 48

(7p) 3. Fie punctul C mijlocul segmentului (AB) şi punctul D situat pe dreapta AB astfel încât $\frac{DB}{DA} = \frac{1}{5}$ şi CD = 12 cm. Aflaţi lungimea segmentului (AB).

(7p) 4. Punctele $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k+1}$, sunt coliniare în această ordine astfel încât segmentele A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{2k}A_{2k+1}$ au lungimi numere naturale consecutive şi A_0A_{2k+1} = 1200mm. Să se afle ce valori poate avea lungimea segmentului A_0A_1

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional „Memorialul David Hrimiuc" ediţia a XII- a, 30 octombrie– 1 noiembrie 2015

Clasa a VI-a
Barem de corectare şi notare

1. Arătaţi că numărul $a=15+3^{2014}$ se divide cu 24.

Gazeta Matematică Nr.10/2014

Soluţie.

$a=15+3^{2014}\Rightarrow a=3\cdot\left(5+3^{2013}\right)\Rightarrow a\vdots 3$

$a=15+3^{2014}\Rightarrow a=15+9^{1007}\Rightarrow a=15+(8+1)^{1007}\Rightarrow a=8k-1+8p+1\Rightarrow a=8(k+p)\Rightarrow a\vdots 8$

Cum 24= 3·8, $a\vdots 3$, $a\vdots 8$, $(3,8)=1\Rightarrow a\vdots 24$

Barem.

$a=15+3^{2014}\Rightarrow a=3\cdot\left(5+3^{2013}\right)\Rightarrow a\vdots 3$	3p
$a=15+3^{2014}\Rightarrow a=15+9^{1007}\Rightarrow a=15+(8+1)^{1007}\Rightarrow a=8k-1+8p+1\Rightarrow a=8(k+p)\Rightarrow a\vdots 8$	3p
24= 3·8, $a\vdots 3$, $a\vdots 8$, $(3,8)=1\Rightarrow a\vdots 24$	1p

2. a. Să se determine numărul natural n care are exact trei divizori şi suma divizorilor este 307
b. Să se determine numărul natural m care are exact patru divizori şi suma divizorilor este 48

Soluţie.

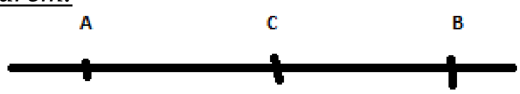
a. Dacă n are exact trei divizori $\Rightarrow$n este pătratul unui număr prim iar divizorii săi sunt 1, d, d^2 $\Rightarrow 1+d+d^2=307\Rightarrow d(d+1)=306\Rightarrow d=17$
b. Dacă m are exact patru divizori $\Rightarrow$n este produsul a două numere prime iar divizorii săi sunt 1, a, b, ab, $\Rightarrow$1+a+b+ab = 48 , a şi b numere prime$\Rightarrow$ (1+a) + b(1+a) = 48 $\Rightarrow$ (1+a)(1+b) = 48 $\Rightarrow$a=5 şi b=7

Barem.

a. divizorii lui n sunt 1, d, d^2, d este număr prim	1p
$1+d+d^2=307\Rightarrow d(d+1)=306$	1p
d =17	1p
b. Divizorii lui m sunt 1, a, b, ab, unde a și b sunt numere prime	1p
1+a+b+ab = 48$\Rightarrow$ (1+a)(1+b) = 48	1p
a=5 şi b=7	2p

3. Fie punctul C mijlocul segmentului (AB) şi punctul D situat pe dreapta AB astfel încât $\frac{DB}{DA}=\frac{1}{5}$ şi CD = 12 cm. Aflaţi lungimea segmentului (AB).

Barem.



$\frac{DB}{DA}=\frac{1}{5}\Rightarrow DA=5\cdot DB\Rightarrow AD>DB$.	1p
Caz I $D\in[AB]$ si $AD=5\cdot DB\Rightarrow AB=6\cdot DB$ si cum $AB=2\cdot CB\Rightarrow D\in[CB]$ si $CB=3\cdot DB$	1p
$CB=3\cdot DB\Rightarrow CD=2\cdot DB\Rightarrow DB=6\Rightarrow AB=36$	2p
Caz II $B\in[AD]$ si $AD=AB+BD\Rightarrow 5\cdot DB=AB+BD\Rightarrow AB=4\cdot DB$ cum $AB=2\cdot CB\Rightarrow BC=2\cdot BD\Rightarrow BC+BD=3\cdot BD$	2p
$12=3\cdot DB\Rightarrow DB=4\Rightarrow AB=16$	1p

4. Punctele $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k+1}$, sunt coliniare în această ordine astfel încât segmentele A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ,…, $A_{2k}A_{2k+1}$ au lungimi numere naturale consecutive şi A_0A_{2k+1} = 1200mm. Să se afle ce valori poate avea lungimea segmentului A_0A_1

Soluţia

A_0A_{2k+1} = 1200mm $\Rightarrow$x + x+1 + x+2 +…+ x+2k =1200 $\Rightarrow$
(2k+1)(x+k)=$2^4\cdot 5^2\cdot 3\Rightarrow$2k+1 $\in\{1,3,5,15,25,75\}$ $\Rightarrow\ldots\Rightarrow$k$\in\{2,7,12\}$ şi x$\in\{36,73,238\}$

<u>*Barem*</u>

A_0A_1 = x, A_1A_2 =x+1, A_2A_3 = x+2, …, $A_{2k}A_{2k+1}$ = x+2k,	2p
A_0A_{2k+1} = 1200mm. $\Rightarrow$x + x+1 + x+2 +…+ x+2k =1200.........................	1p
(2k+1)(x+k)=$2^4\cdot 5^2\cdot 3$	1p
2k+1 $\in\{1,3,5,15,25,75\}$ $\Rightarrow\ldots\Rightarrow$k$\in\{2,7,12\}$	1p
x$\in\{36,73,238\}$	2p

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a VII- a

Subiecte

1. (7p) Determinaţi restul împărţirii numărului $7^{2015}-6^{2015}$ la 42.

(Ionel Tudor, Călugăreni, Giurgiu, GMB 2 / 2015)

2. (7p) Determinaţi toate numerele naturale x cu proprietatea că: $\dfrac{2x^2+15}{3x+2}\in\mathbb{N}$.

(Prof. Rodica Coman, Bistriţa)

3. Fie $x, y, z>0$. Să se arate că:

(3p) a) $\dfrac{3x^2}{x^2+xy+y^2}\geq 2-\dfrac{y}{x}$

(4p) b) Dacă, în plus, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6045$, atunci:

$$\frac{x^2}{y\left(x^2+xy+y^2\right)}+\frac{y^2}{z\left(y^2+yz+z^2\right)}+\frac{z^2}{x\left(z^2+zx+x^2\right)}\geq 2015.$$

În ce caz are loc egalitatea?

4. (7p) Fie ABC un triunghi oarecare, N mijlocul laturii $[AC]$, E simetricul punctului B faţă de N şi P simetricul punctului C faţă de B. Dacă dreapta PE intersectează laturile $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele M şi respectiv F, calculaţi raportul $\dfrac{FM}{MP}$.

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a VII- a

Barem de corectare

1. Fie $A = 7^{2015} - 6^{2015}$. Avem:

$A = 7^{2015} - 6^{2015} = \left(6+1\right)^{2015} - 6^{2015} = M_6 + 1 - M_6 = M_6 + 1 \Rightarrow 6/A-1$ **(2,5p)**

$A = 7^{2015} - 6^{2015} = 7^{2015} - \left(7-1\right)^{2015} = M_7 - \left(M_7 - 1\right) = M_7 + 1 \Rightarrow 7/A-1$ **(2,5p)**

$$\left.\begin{array}{l} 6/A-1 \\ 7/A-1 \\ \left(6,7\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 42/A-1 \quad (1p) \quad \Rightarrow A-1 = 42k,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow A = 42k+1 \Rightarrow r = 1 \quad (1p)$$

2. Soluţia 1.

$$\frac{2x^2+15}{3x+2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{18x^2+135}{3x+2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{18x^2+12x-12x-8+143}{3x+2} = \qquad (1p)$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{6x\left(3x+2\right)-4\left(3x+2\right)+143}{3x+2} \qquad (1p) = \frac{1}{9}\left(6x-4+\frac{143}{3x+2}\right) \qquad (1p)$$

$$\frac{2x^2+15}{3x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 6x-4-\frac{143}{3x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{143}{3x+2} \in \mathbb{N} \qquad (1p) \quad \Rightarrow 3x+2/143 \qquad (1p) \Rightarrow$$

$$\overset{x\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} 3x+2 = 1 \ sau \ 3x+2 = 11 \ sau \ 3x+2 = 13 \Rightarrow x = 3 \qquad (1p)$$

3 este soluţie, pentru că: $\frac{2\cdot 3^2+15}{3\cdot 3+2} = \frac{33}{11} = 3 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

Soluţia 2.

$$\left.\begin{array}{r} \frac{2x^2+15}{3x+2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3x+2/2x^2+15 \Rightarrow 3x+2/6x^2+45 \ (1p) \\ 2/3x+2 \Rightarrow 3x+2/6x^2+4x \ (1p) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2/4x-45 \Rightarrow 3x+2/12x-135 \ (1p) \\ 3x+2/3x+2 \Rightarrow 3x+2/12x+8 \ (1p) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+2/143 \qquad (1p) \qquad \overset{x\in\mathbb{N}}{\Rightarrow} 3x+2 = 1 \ sau \ 3x+2 = 11 \ sau \ 3x+2 = 13 \Rightarrow x = 3 \qquad (1p)$$

3 este soluţie, pentru că: $\frac{2\cdot 3^2+15}{3\cdot 3+2} = \frac{33}{11} = 3 \in \mathbb{N}$ **(1p)**

3. a)

$$\frac{3x^2}{x^2+xy+y^2} \ge 2-\frac{y}{x} \ \Big| \cdot x\left(x^2+xy+y^2\right) > 0 \Leftrightarrow 3x^3 \ge 2x^3+2x^2y+2xy^2-x^2y-xy^2-y^3 \quad (1p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-x^2y-xy^2+y^3 \ge 0 \qquad (0,5p) \quad \Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)-xy\left(x+y\right) \ge 0 \qquad (0,5p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(x-y\right)^2 \ge 0 \quad adev. \qquad (0,5p) \Rightarrow \frac{3x^2}{x^2+xy+y^2} \ge 2-\frac{y}{x} \qquad (0,5p)$$

Obs. Egalitatea are loc d.d. $x = y$.

b)
$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{3x^2}{x^2+xy+y^2} \ge 2-\dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{x^2}{y\left(x^2+xy+y^2\right)} \ge \dfrac{2x-y}{3xy} & (0,5p)\\ \dfrac{3y^2}{y^2+yz+z^2} \ge 2-\dfrac{z}{y} \Rightarrow \dfrac{y^2}{z\left(y^2+yz+z^2\right)} \ge \dfrac{2y-z}{3yz} & (0,5p)\\ \dfrac{3z^2}{z^2+xz+x^2} \ge 2-\dfrac{x}{z} \Rightarrow \dfrac{z^2}{x\left(z^2+xz+x^2\right)} \ge \dfrac{2z-x}{3xz} & (0,5p)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

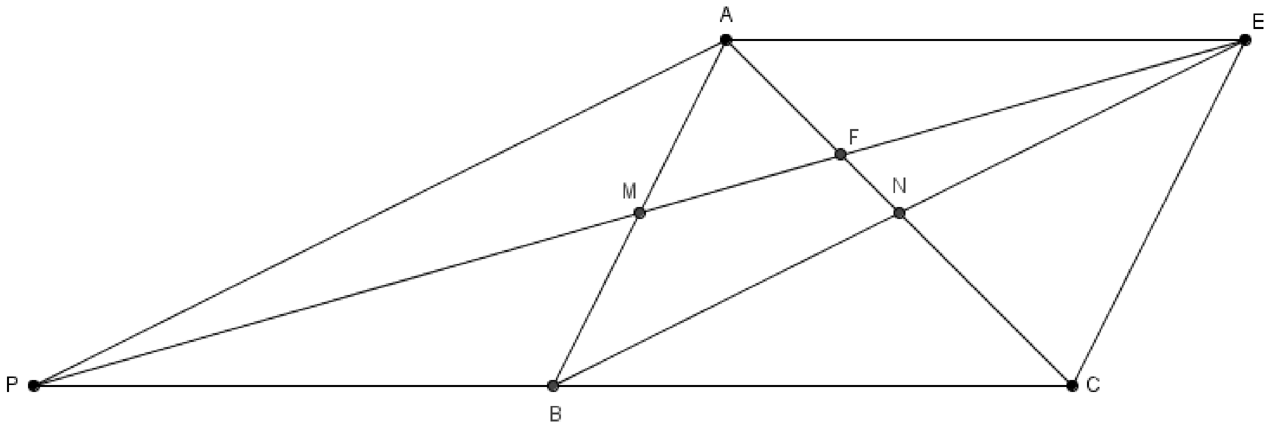
$$\Rightarrow \frac{x^2}{y\left(x^2+xy+y^2\right)}+\frac{y^2}{z\left(y^2+yz+z^2\right)}+\frac{z^2}{x\left(z^2+xz+x^2\right)} \ge \frac{2x-y}{3xy}+\frac{2y-z}{3yz}+\frac{2z-x}{3xz}= \qquad (0,5p)$$

$$=\frac{2xz-yz+2xy-xz+2yz-xy}{3xyz}=\frac{xz+yz+xy}{3xyz} \quad (0,5p)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{3}\cdot 6045=2015 \quad (0,5p)$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z$ (din primele 3 relaţii), adică:

$x = y = z = \dfrac{1}{2015}$ (din condiţia suplimentară impusă).

4. Figura **(1p)**



$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} N-mijl.\left[AC\right]\\ E=sim_N B \Rightarrow N-mijl.\left[BE\right] \quad (0,5p)\end{array}\right\} \Rightarrow ABCE-paralel. \Rightarrow AE \parallel BC\ ,\ \left[AE\right]\equiv\left[BC\right] \quad (0,5p)\\ P=sim_B C \Rightarrow \left[PB\right]\equiv\left[BC\right] \quad (0,5p)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE \parallel PB\ ,\ \left[AE\right]\equiv\left[PB\right] \quad (0,5p) \Rightarrow APBE-paralel. \quad (0,5p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M-mijl.\left[AB\right] \quad (0,5p),\ \left[PM\right]\equiv\left[ME\right] \quad (0,5p) \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{r} M-mijl.\left[AB\right] \Rightarrow \left[EM\right]-med.\ \hat{\imath}n\ ABE \quad (0,5p)\\ N-mijl.\left[BE\right] \Rightarrow \left[AN\right]-med.\ \hat{\imath}n\ ABE \quad (0,5p)\end{array}\right\} \Rightarrow F-c.g.\ \hat{\imath}n\ ABE \quad (0,5p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{FM}{ME}=\frac{1}{3} \quad (0,5p) \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{FM}{MP}=\frac{1}{3} \quad (0,5p)$$

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc” ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a VIII- a

Subiecte:

1. (7p) Determinaţi numerele întregi x, y, z pentru care $x^2-25y^2-5^z=8$.

(Pavel Rîncu, Bozovici, Caraş-Severin, GMB 6-7-8 / 2015)

2. (4p) a) Demonstraţi că: $\frac{2x+n}{n+2}\geq\frac{n+4}{3x+n+1}$, pentru orice $n, x\in\mathbb{N}^*$.

(3p) b) Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{2x+1}{3}+\frac{2x+2}{4}+\frac{2x+3}{5}+\dots+\frac{2x+1008}{1010}=\frac{1013}{3x+1010}+\frac{1014}{3x+1011}+\frac{1015}{3x+1012}+\dots+\frac{2020}{3x+2017},\ x\in\mathbb{N}^*$$

3. (1,5p) a) Demonstraţi că dacă $x\geq 0$ atunci $2(\sqrt{x}-4)\leq\frac{x}{8}$.

(2,5p) b) Arătaţi că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc inegalitatea: $7(|x|-14)\leq\frac{x^2}{8}$.

(3p) c) Arătaţi că dacă $x, y\geq 0$ şi $2x+7y\leq 2016$ atunci $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 36$.

4. Se dă rombul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle ABC)=30^\circ$. Se construieşte pătratul $BDEF$ astfel încât C să fie un punct interior pătratului. Dacă $DC\cap BF=\{H\}$ şi $EC\cap BF=\{G\}$, demonstraţi că :

(3p) a) ΔCBH este isoscel.

(2p) b) $[FC]$ este mediană în ΔEFG.

(2p) c) ΔCGH este isoscel.

(Prof. Ioan Duicu, Bistriţa)

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.*

Matematica în Bucovina. Concursul Internaţional de matematică „Memorialul David Hrimiuc”
ediţia a XII - a, 30 octombrie – 1 noiembrie 2015

Clasa a VIII- a

Barem de corectare

1. $\left.\begin{array}{r} x^2-25y^2-8=5^z \\ z<0 \Rightarrow 5^z \notin \mathbb{Z} \\ x,y\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^2-25y^2-8\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} fals! \Rightarrow z\in\mathbb{N}$ **(1p)**

$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x^2-3=25y^2+5^z+5 \\ z\in\mathbb{N}^* \Rightarrow 5/25y^2+5^z+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5/x^2-3 \\ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow u\left(x^2\right)\in\{0,1,4,5,6,9\} \end{array}\right\} fals! \Rightarrow z\notin\mathbb{N}^*$ **(1,5p)**

Rezultă $z=0$ **(0,5p)**

$x^2-25y^2-5^z=8 \overset{z=0}{\Leftrightarrow} x^2-25y^2=9 \Leftrightarrow (x-5y)(x+5y)=9 \Leftrightarrow$ **(1p)**

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-9 \\ x+5y=-1 \end{cases} sau \begin{cases} x-5y=-3 \\ x+5y=-3 \end{cases} sau \begin{cases} x-5y=-1 \\ x+5y=-9 \end{cases} sau \begin{cases} x-5y=1 \\ x+5y=9 \end{cases} sau \begin{cases} x-5y=3 \\ x+5y=3 \end{cases} sau \begin{cases} x-5y=9 \\ x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ **(1,5p)**

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} sau \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ **(1p)**

Deci, $\begin{cases} x=\pm 3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **(0,5p)**

2. a) Soluţia 1.

$\frac{2x+n}{n+2} \geq \frac{n+4}{3x+n+1}, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow (2x+n)(3x+n+1) \geq (n+2)(n+4)\ (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ **(1p)** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2+(5n+2)x-(5n+8)\geq 0, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ **(1p)** $\Leftrightarrow (x-1)(6x+5n+8)\geq 0$, $(\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ ($\mathcal{A}$) **(1p)**

$\Rightarrow \frac{2x+n}{n+2} \geq \frac{n+4}{3x+n+1}, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$. **(1p)** Egalitate d.d. $x=1$.

Soluţia 2.

$\frac{2x+n}{n+2} \geq 1 \Leftrightarrow 2x+n \geq n+2 \Leftrightarrow x\geq 1, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ ($\mathcal{A}$) $\Rightarrow \frac{2x+n}{n+2}\geq 1$, $(\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ **(1,5p)**

$\frac{n+4}{3x+n+1} \leq 1 \Leftrightarrow n+4 \leq 3x+n+1 \Leftrightarrow x\geq 1$, $(\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ ($\mathcal{A}$) $\Rightarrow \frac{n+4}{3x+n+1}\leq 1, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ **(1,5p)**

Rezultă: $\frac{2x+n}{n+2} \geq \frac{n+4}{3x+n+1}, (\forall) n,x\in\mathbb{N}^*$ **(1p)** Egalitate d.d. $x=1$.

b) De la punctul **a)** rezultă: $\frac{2x+1}{3}+\frac{2x+2}{4}+\frac{2x+3}{5}+\cdots+\frac{2x+1008}{1010}\geq 1008$, $(\forall) x\in\mathbb{N}^*$ **(1p)** și

$\frac{1013}{3x+1010}+\frac{1014}{3x+1011}+\frac{1015}{3x+1012}+\cdots+\frac{2020}{3x+2017}\leq 1008, (\forall)\ x\in\mathbb{N}^*$ **(1p)**

Avem:

$$\frac{2x+1}{3}+\frac{2x+2}{4}+\frac{2x+3}{5}+\cdots+\frac{2x+1008}{1010}=\frac{1013}{3x+1010}+\frac{1014}{3x+1011}+\frac{1015}{3x+1012}+\cdots+\frac{2020}{3x+2017}\ ,\ x\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x+1}{3}+\dfrac{2x+2}{4}+\dfrac{2x+3}{5}+\cdots+\dfrac{2x+1008}{1010}=1008\\ \dfrac{1013}{3x+1010}+\dfrac{1014}{3x+1011}+\dfrac{1015}{3x+1012}+\cdots+\dfrac{2020}{3x+2017}=1008\end{cases}\ ,\ x\in\mathbb{N}^*\ \Leftrightarrow\ x=1$$ **(1p)**

3. a) $\left(\sqrt{x}-8\right)^2\geq 0$, $(\forall)x\geq 0$ **(0,5p)** $\Rightarrow x-16\sqrt{x}+64\geq 0$, $(\forall)x\geq 0$ **(0,5p)**

$\Rightarrow 2(\sqrt{x}-4)\leq\dfrac{x}{8}$, $(\forall)x\geq 0$ **(0,5p)**

b) $|x|^2=x^2$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ **(0,5p)** $\left(|x|-28\right)^2\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ **(0,5p)**

$\Rightarrow x^2-56|x|+784\geq 0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ **(0,5p)** $\Rightarrow 7(|x|-14)\leq\dfrac{x^2}{8}$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$ **(1p)**

c) Soluţia 1. De la punctul **a)** rezultă, înlocuind pe x cu y: $\sqrt{y}\leq\dfrac{y+64}{16}$, $(\forall)y\geq 0$. **(1p)**

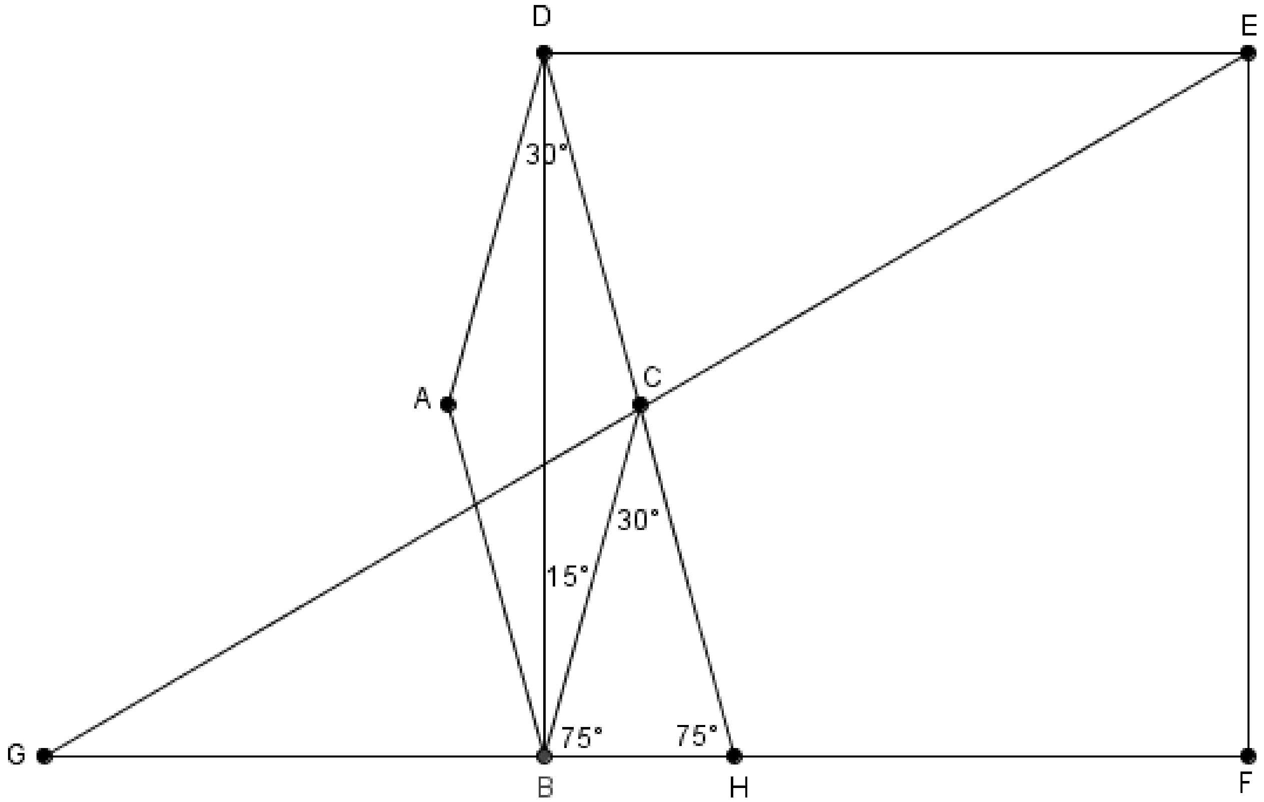
De la punctul **b)** rezultă, înlocuind pe x cu $\sqrt{x}$: $\sqrt{x}\leq\dfrac{x+784}{56}$, $(\forall)y\geq 0$ **(1p)**

Prin adunare, obţinem:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\frac{x+784}{56}+\frac{y+64}{16}=\frac{2x+7y+1568+448}{112}\leq\frac{2016+2016}{112}=36\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 36$$ **(1p)**

Obs. $\sqrt{x}\leq\dfrac{x+a^2}{2a}$, $(\forall)x\geq 0$, $a>0$.

4.



a) Figura **(1p)**

$$\left.\begin{array}{r} ACBD-romb \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow \sphericalangle BCH \equiv \sphericalangle ADC \\ m(\sphericalangle ADC)=30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle BCH)=30^\circ \quad (0,5p)$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ACBD-romb \\ m(\sphericalangle ABC)=30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle DBC)=15^\circ \\ ABCD-pătrat \Rightarrow m(\sphericalangle DBH)=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle CBH)=75^\circ \quad (0,5p)$$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle CHB)=180^\circ-30^\circ-75^\circ \quad (0,5p) \quad \Rightarrow \sphericalangle CBH \equiv \sphericalangle CHB \Rightarrow CBH-isoscel \quad (0,5p)$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} CBH-isoscel \Rightarrow [CB]\equiv[CH] \\ ABCD-romb \Rightarrow [CB]\equiv[DC] \end{array}\right\} \Rightarrow [CH]\equiv[DC] \quad (0,5p) \\ BDEF-pătrat \Rightarrow BH \parallel DE \Rightarrow \sphericalangle CDE \equiv \sphericalangle CHG \ (corep.) \quad (0,5p) \\ \sphericalangle DCE \equiv \sphericalangle HGC \quad (opuse\ la\ vârf) \end{array}\right\} \overset{(ULU)}{\Rightarrow} \Delta DCE \equiv \Delta HCG \quad (0,5p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [CE]\equiv[CG] \Rightarrow C-mijl.[EG] \Rightarrow [FC]-mediană\ în\ EFG \quad (0,5p)$$

c) Fie K în interiorul pătratului $BDEF$ a.î. EKF este triunghi echilateral.

$$\left.\begin{array}{l} EKF-echilat. \Rightarrow [EK]\equiv[FK]\equiv[EF] \\ BDEF-pătrat \Rightarrow [BF]\equiv[EF]\equiv[ED] \end{array}\right\} \Rightarrow [FK]\equiv[BF], [EK]\equiv[ED] \Rightarrow BKF, DKE-isoscele$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} EKF-echilat. \Rightarrow m(\sphericalangle EFK)=60^\circ \\ BDEF-pătrat \Rightarrow m(\sphericalangle EFB)=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle KFB)=30^\circ \\ [FK]\equiv[BF] \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle FBK)=75^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle DBK)=15^\circ \quad (0,5p)$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} EKF-echilat. \Rightarrow m(\sphericalangle FEK)=60^\circ \\ BDEF-pătrat \Rightarrow m(\sphericalangle FED)=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle KED)=30^\circ \\ [EK]\equiv[ED] \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle EDK)=75^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BDK)=15^\circ \quad (0,5p)$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle BDK)=m(\sphericalangle BDC)=15^\circ \Rightarrow [DC=[DK \\ m(\sphericalangle DBK)=m(\sphericalangle DBC)=15^\circ \Rightarrow [BC=[BK \end{array}\right\} \Rightarrow K=C \Rightarrow m(\sphericalangle DCE)=75^\circ \quad (0,5p) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m(\sphericalangle GCH)=75^\circ \\ dar,\ m(\sphericalangle CHG)=75^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow CGH-isoscel \quad (0,5p)$$

Notă: Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.