Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a IX-a

Problema 1.

Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică crescătoare cu termeni pozitivi. Să se demonstreze că $b_{2n+2}-b_1\geq(2n+1)\cdot(b_{n+2}-b_{n+1}),\ (\forall)n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$

Problemă selectată de Carmen Necula , profesor, Galați

Problema 2.

Se consideră triunghiul ABC neisoscel şi $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel încât $[BM]\equiv[CN]$. Să se demonstreze că dreapta determinată de mijloacele segmentelor $[MN]$ şi $[BC]$ este paralelă cu bisectoarea interioară a triunghiului ABC.

Problemă selectată deViorica Bujor, profesor, Galați

Problema 3. Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale inecuaţia

$\left\{\sqrt{\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]}\right\}\geq\frac{1}{2}$, unde cu $\{a\},[a]$ s-a notat partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real a.

Tătaru Radu-Marius, profesor, Galați

Problema 4. Fie numerele reale $x_1,\ x_2,x_3,\ ...,\ x_n\in[0,1],\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$ Să se demonstreze că :

$$\frac{n-1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot...\cdot x_n}\leq\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+...+\frac{1}{1+x_n}\leq n-1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot...\cdot x_n}.$$

G.M. nr. 11/2013

Problemă selecată de Vasile Popa, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie-2014

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

<table>
<tr><th>Nr. problemei</th><th>Soluţie, rezolvare</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.</td><td>$\left.\begin{array}{l}\text{Fie } q \text{ raţia progresiei geometrice}\\ \text{Şirul } \left(b_n\right)_{n\geq 1} \text{ este o progresie geometrică crescătoare}\end{array}\right\} \Rightarrow q \geq 1$</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>$b_{2n+2} - b_1 \geq (2n+1)\cdot\left(b_{n+2} - b_{n+1}\right) \Leftrightarrow b_1 \cdot q^{2n+1} - b_1 \geq (2n+1)\cdot\left(b_1\cdot q^{n+1} - b_1 \cdot q^n\right)$;
Şirul este crescător, deci $q \geq 1$.
Dacă $q = 1$, inegalitatea este adevarată.
În cazul $q>1$, inegalitatea devine:
$q^{2n+1} - 1 \geq (2n+1)\cdot q^n \cdot (q-1) \Leftrightarrow 1 + q + q^2 + ... + q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$, $n \geq 1$.</td><td>3p</td></tr>
<tr><td>Demonstrăm prin inducţie matematică: $1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$, $n \geq 1$
$I.\ P(1): 1+q+q^2 \geq 3\cdot q \Leftrightarrow 1-2q+q^2 \geq 0 \Leftrightarrow (q-1)^2 \geq 0 \quad (A)$
II. Demonstrăm că $P(n) \to P(n+1), \forall n \geq 1$;
Presupunem $P(n): 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n \quad (A)$
Să demonstrăm că $P(n+1)$: $1+q+q^2+...+q^{2n}+q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+3)\cdot q^{n+1}$ este adevărată.
Din $P(n) \Rightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n}+q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+1)\cdot q^n + q^{2n+1}+q^{2n+2} \ (A)$
$(2n+1)\cdot q^n + q^{2n+1}+q^{2n+2} \geq (2n+3)\cdot q^{n+1} \Rightarrow (2n+1)+q^{n+1}+q^{n+2} \geq (2n+3)\cdot q^1 \Rightarrow$
$q^{n+1}-q+q^{n+2}-q \geq (2n+1)\cdot(q-1) \overset{:(q-1)}{\Rightarrow} q\cdot\left(1+q+q^2+...+q^{n-1}\right)+q\cdot\left(1+q+q^2+...+q^n\right) \geq (2n+1) \Rightarrow$
$2\cdot\left(q+q^2+...+q^n\right)+q^{n+1} \geq (2n+1)$ adevărat pentru $q \geq 1 \Rightarrow P(n+1)$ adevărat $\Rightarrow$
$P(n)$ adevărat, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.</td><td>2p</td></tr>
<tr><td>Metoda II:
Aplicând inegalitatea mediilor $\Rightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot \sqrt[2n+1]{1\cdot q\cdot q^2\cdot q^3\cdot ...\cdot q^{2n}} \Leftrightarrow$
$1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\sqrt[2n+1]{q^{\frac{2n(2n+1)}{2}}} \Leftrightarrow 1+q+q^2+...+q^{2n} \geq (2n+1)\cdot q^n$.</td><td></td></tr>
</table>

2.	Fie punctul P mijlocul segmentului $[MN]$ şi Q mijlocul segmentului $[BC]$; $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CN}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}\right)$;	**2p**
	Fie E $\in(AB)$, astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{EA}$; Fie F $\in(CA)$, astfel încât $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{FA}$; Atunci $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}\right)$;	**3p**
	Dar $\left\|\overrightarrow{BM}\right\|=\left\|\overrightarrow{CN}\right\|\Rightarrow\left\|\overrightarrow{EA}\right\|=\left\|\overrightarrow{FA}\right\|\Rightarrow\triangle AEF$ este isoscel ; Fie $[AT]$ mediana în $\triangle AEF$ isoscel $\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\overrightarrow{PQ}\\ [AT-\text{bisectoarea }\measuredangle EAF\end{cases}\Rightarrow PQ\parallel AT$	**2p**
3.	Fie $E(n)=\left[\frac{n^2}{2}\right]+\left[\frac{(n+1)^2}{2}\right]$; 1. $n=2k,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow E(2k)=\left[2k^2\right]+\left[\frac{(2k+1)^2}{2}\right]=\left[2k^2\right]+\left[2k^2+2k+\frac{1}{2}\right]=$ $=4k^2+2k=2k\cdot(2k+1)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1)\quad(1)$	**3p**
	2. $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow E(2k+1)=\left[\frac{(2k+1)^2}{2}\right]+\left[2k^2+4k+2\right]=$ $\left[2k^2+2k+\frac{1}{2}\right]+\left[2k^2+4k+2\right]=$ $4k^2+6k+2=(2k+1)\cdot(2k+2)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1)\quad(2)$ Din (1) şi $(2)\Rightarrow E(n)=n\cdot(n+1),\ (\forall)\text{n}\in\mathbb{N}$;	**2p**
	$n<\sqrt{n\cdot(n+1)}<\frac{2n+1}{2}<n+1\ \Rightarrow\left\{\sqrt{n\cdot(n+1)}\right\}<\frac{1}{2}\Rightarrow$ inecuaţia nu are soluţii.	**2p**
4.	Demonstrăm prin metoda inducţiei matematice relaţia din stânga: I. Verificare pentru $n=2$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\Leftrightarrow$ $(1+x_1)\cdot(1+x_2)(1+x_1\cdot x_2)+2(1+x_1)\cdot(1+x_2)\le 2\cdot(1+x_1\cdot x_2)\cdot(2+x_1+x_2)\Leftrightarrow$ $1-x_1-x_2+x_1^2\cdot x_2+x_2^2\cdot x_1-x_1^2\cdot x_2^2\ge 0\Leftrightarrow$ $(1-x_1)\cdot(1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)\ge 0(A),(\forall)x_1,x_2\in[0,1]$;	**2p**

	II. Presupunem relaţia adevărată pentru n şi să demonstrăm că este adevărată pentru n+1: $\frac{n}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}}(2)$ Din $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}\le\frac{1}{1+x_{n+1}}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}$ şi $\frac{n-1}{2}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}\Rightarrow$ prin adunarea lor (2), conform inducţiei matematice, relaţia este demonstrată.	**3p**
	La fel se demonstrează partea dreaptă a relaţiei. Pentru $n=2$: $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}\le 1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2}\Leftrightarrow$ $(2+x_1+x_2)\cdot(1+x_1\cdot x_2)\le(2+x_1\cdot x_2)\cdot(1+x_1+x_2+x_1\cdot x_2)\Leftrightarrow$ $x_1+x_2+x_1\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2\ge 0(A),(\forall)x,y\in[0,1]$.	**1p**
	Presupunem relaţia adevărată pentru n şi să demonstrăm că este adevărată pentru n+1: $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}+\frac{1}{1+x_{n+1}}\le n+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}(3)$ Dar $\frac{1}{1+x_{n+1}}+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}\le 1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}}$ si şi din $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}\le n-1+\frac{1}{1+x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n}(A)\Rightarrow$ prin adunarea lor (3).	**1p**