CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013

CLASA A IX A

1. Fie $ABCD$ un paralelogram, O punctul de intersecţie al diagonalelor şi $M \in AB$ asfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. Arătaţi că:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO}$;

b) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Prof. Marica Octavian, C.N.E ”Andrei Bârseanu” Braşov

2. Pe o dreaptă se consideră punctele $M_0, M_1, ..., M_n$, în această ordine, astfel încât lungimea segmentului M_0M_1 este egală cu 1, lungimea segmentului M_1M_2 este $\frac{4}{5}$ din lungimea segmentului M_0M_1, lungimea segmentului M_2M_3 este $\frac{4}{5}$ din lungimea segmentului M_1M_2 şi aşa mai departe.

a) Să se determine lungimea segmentului M_0M_3

b) Să se demonstreze că $M_0M_n < 5$, oricare ar fi numărul natural *n*.

Prof. Aurel Aldea, C.N. ”Doamna Stanca”Făgăraş

3. Se consideră numerele $x = \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ şi $y = \sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

a) Să se arate că $x + y = 4$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Q}$ asfel încât $ax + by = 2013$.

Prof. Marica Octavian, C.N.E ”Andrei Bârseanu” Braşov

4. Fie mulţimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,/\, x = \dfrac{6k^2 - 5k + 2}{3k+2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Să se determine mulţimea A.

b) Să se determine cardinalul mulţimii B, dacă card P(A) + card P(B) = 144, unde P(M) reprezintă mulţimea părţilor mulţimii M.

Prof. Aurel Aldea, C.N. ”Doamna Stanca”Făgăraş

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013

CLASA A X A

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$4^{\lg(4x^2-4x+1)}+4^{\lg(x^2+2x+1)}=2\cdot 4^{\lg(2x^2+x-1)}$$

Prof. Dana Alexandrescu, C.Ş. "Grigore Antipa"Braşov

2. a) Calculaţi:

$$\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2+...+\log_2 2013}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2+...+\log_3 2013}+...+\frac{1}{\log_{2013} 1+\log_{2013} 2+...+\log_{2013} 2013}$$

b) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ soluţiile ecuaţiei $x^2+x+1=0$. Arătaţi că numărul $x_1^{2013}+x_2^{2013}$ este întreg.

3. Să se afle numărul natural *n* din egalitatea

$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{2}+8}{2}.$$

Prof. Aurel Aldea, C.N. "Doamna Stanca"Făgăraş

4. Se consideră numărul $z_n=1+i+i^2+\cdots+i^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi z_{100}.

b) Determinaţi valorile naturale ale lui *n* pentru care $z_n\in\mathbb{R}$.

Prof .Gabriela Frîncu, C.Ş. "Grigore Antipa"Braşov

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013

CLASA A XI A

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Pentru fiecare număr natural nenul *n*, notăm $B_n = A^n + A^{n+1} + A^{n+2}$.

a) Să se arate că $A^{2013} = a^{671} I_3$.

b) Determinaţi numerele reale *a* pentru care $\det B_n = 0$.

Catedra de matematică a C.T. Mircea Cristea, Braşov

2. O matrice $A \in M_3(\mathbb{Z})$ are elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi suma elementelor de pe fiecare linie sau coloană este egală cu 2.

a) Să se precizeze semnul determinantului matricei *A*.

b) Să se determine cea mai mică valoare a determinantului matricei *A*.

Prof. Aurel Aldea, C.N. ”Doamna Stanca”Făgăraş

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & x\le 1 \\ bx^2+ax, & x>1 \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se studieze existenţa limitei: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ asfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{xf(x)}+x\right)=1$.

Prof. Marica Octavian, C.N.E ”Andrei Bârseanu” Braşov

4. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{4+x}-2}$.

b) Fie *a*, *b*, *c* numere reale. Să se arate că:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x}+b\sqrt{x+1}+c\sqrt{x+2}\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a+b+c=0.$$

Catedra de matematică a C.T. Mircea Cristea, Braşov

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA LOCALĂ - 9 februarie 2013
CLASA A XII A

1. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admite o primitivă F ce verifică relaţia

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ F(x) & f(x) \end{vmatrix} = \cos x$ şi f(0) = 1.

Prof. Aurel Aldea, C.N. ”Doamna Stanca”Făgăraş

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^3+x)\ln x$.

a) Să se determine constantele reale a şi b, astfel încât funcţia $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=\frac{x^2}{4}\left(ax^2+2\right)\ln x-\frac{x^2}{16}\left(x^2-b\right)$ să fie o primitivă a funcţiei f.

b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

Prof.Gabriela Frîncu, C.Ş. ”Grigore Antipa”Braşov

3. Fie $G=\left\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1\right\}$.

a) Arătaţi că $9+4\sqrt{5}\in G$.

a) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Să se arate că mulţimea $G\cap(0;1)$ are cel puțin 2013 elemente.

Prof. Maria Prună, C.Ş. ”Grigore Antipa”Braşov

4. Pe mulţimea $G = (0,\infty) \setminus \{1\}$ se consideră operaţia $x \,\Delta\, y = x^{2\ln y}$.

a) Să se rezolve în mulţimea G ecuaţia $x \,\Delta\, e = 4$, unde e este baza logaritmului natural.

b) Să se demonstreze că $x \,\Delta\, y\in G$, pentru $\forall\, x, y\in G$.

c) Să se arate că operaţia „ Δ ” este asociativă pe mulţimea G.

Prof. Dana Alexandrescu, C.Ş. ”Grigore Antipa”Braşov

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.