OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

VARIANTA 2

1. Fie matricele A, B ∈ $M_2(\mathbf{R})$ .Să se arate că:

a) det(A+B) – det(A) –det(B)=tr(A)tr(B) – tr(AB).

b)Dacă A este inversabilă ,atunci ecuatia det(xA + B)=0 , are două soluții reale şi distincte dacă şi numai dacă are loc inegalitatea

$$(\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B))^2 > 4\det(A)\det(B) .$$

2.a)Să se calculeze X^n , n∈ N, dacă X = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b)Să se arate că orice două matrice pătratice de ordinul al treilea A şi B având toate elementele reale cu proprietatea că $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nu comută la înmultire .

c)Să se dea exemplu de două matrice pătratice A şi B de ordinul al treilea având toate elementele reale cu proprietatea că $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ şi $x_{n+1}=\sqrt{\frac{1+x_n}{2}}, n\geq 1$. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_1x_2...x_n$.

4.Pentru un şir de numere reale $(a_n)_n$ definim şirurile$(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ prin x_n =min(a_n,a_{n+1}) şi y_n = max (a_n,a_{n+1}),(∀) n∈ N .

a)Să se arate că dacă şirul $(a_n)_n$ are limită atunci şirurile $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ au limită.

b)Este reciproca adevărată ?

c)Să se arate că dacă $(a_n)_n$ este doar mărginit şi verifică $a_{n+2}\leq\frac{a_{n+1}+a_n}{2}$, ,(∀) n∈ N , atunci $(y_n)_n$ este convergent.

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2014

Clasa a XI-a

VARIANTA 2

BAREM DE CORECTARE:

1a) Demonstratia prin calcul direct sau altfel--4 puncte

b) Scrierea ecuatiei sub forma $\det(A)x^2+(tr(A)tr(B)-tr(AB))x+\det(B)=0.$---1punct

Ecuatia este de gradul al doilea(detA $\neq 0$)--- 1punct

Conditia $\Delta>0$ *şi obtinerea* $(\mathrm{tr(AB)}-\mathrm{tr(A)tr(B)})^2>4\det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$ -----------1punct

2.a) Obținerea formei $X^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & 1 & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}$, unde $a_n=\frac{1}{2}(5^n+(-1)^n)$ şi $b_n=\frac{1}{2}(5^n-(-1)^n), \forall n \in \boldsymbol{N}$ *,prin inductie sau cu şiruri sau altfel* -- *3puncte*

b)Reducerea la absurd şi obtinerea det(A^2+B^2)≥ 0 ---2 puncte

det(X) <0 *şi* finalizare---1 punct

c) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$-- 1 punct

3 Convergenta şirului--4 puncte

Calculul primei limite (valoarea este 1)---1 punct

Calculul celei de-a doua limite (valoarea este $\frac{2}{\pi}$)---2 puncte

(Dacă prima limita se calculeaza folosind exprimarea termenului general al şirului sub forma

x_n=*cos*($\frac{\pi}{2^{n+1}}$ *), pentru inductie se acordă 4 puncte si pentru calculul primei limite 1 punct)*

4.a)Cazul cand şirul initial este convergent --- *3puncte*

Cazul cand şirul initial are limita $+\infty$ şi finalizare---*1 punct*

b)$a_n=(-1)^n\ (\forall)\ n \in N$ *şi verificare*--*1 punct*

c)Monotonia --*1punct*

Mărginirea şi finalizare cu teorema lui Weierstrass---*1punct*

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro