Olimpiada de Matematică

Faza locală, 2016

Barem de notare , clasa a X-a

1. **a) Arătaţi că numărul $\boldsymbol{log_{2015}2016}$ este număr iraţional;**

   b) Comparaţi numerele $\boldsymbol{log_5 6}$ şi $\boldsymbol{log_6 7}$;

   c) Calculaţi $\boldsymbol{E = lg^3 5 + lg^3 20 + lg8 \cdot lg(0,25)}$.

   Soluţie: a) Presupunem că numărul $log_{2015}2016$ este raţional. Atunci există numerele $a, b \in N^*$ astfel încât $log_{2015}2016 = \frac{a}{b}$. Obţinem $2016 = 2015^{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow 2016^b = 2015^a$, relaţie imposibilă deoarece un număr e par şi celălalt impar. (**2p**)

   b) Aplicând inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive $log_6 5$ și $log_6 7$ obţinem $\sqrt{log_6 5 \cdot log_6 7} \le \frac{log_6 5 + log_6 7}{2} = \frac{log_6 35}{2} < \frac{log_6 36}{2} = 1$, deci $log_6 5 \cdot log_6 7 < 1 \Leftrightarrow log_6 7 < log_5 6$. (**2p**)

   c) $E = lg^3 5 + (2lg2 + lg5)^3 + 3lg2 \cdot (-2lg2) = (1 - lg2)^3 + (1 + lg2)^3 - 6lg^2 2 = 2$ **(3p)**

2. **Determinaţi valorile lui $\boldsymbol{x \in Z}$ pentru care $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 12x + 29} \in Q}$.**

   Soluţie: Pentru ca radicalul de ordin 3 dintr-un număr întreg să fie raţional, trebuie ca numărul de sub radical să fie cub perfect. (**1p**)

   Deci există $y \in Z$ astfel încât $x^3 - 6x^2 + 12x + 29 = y^3 \Leftrightarrow (x-2)^3 + 37 = y^3 \Leftrightarrow y^3 - (x-2)^3 = 37 \Leftrightarrow (y - x + 2)(y^2 + y(x-2) + (x-2)^2) = 37$. (**3p**)

Obţinem că $y-x+2$ este divizor al lui 37, deci $y-x+2=1$ şi $y^2+y(x-2)+(x-2)^2=37$, ultima expresie fiind pozitivă pentru orice x şi y. Rezolvând sistemul obţinem $x=-2$ şi $y=-3$ sau $x=5$ și $y=4$. (**3p**)

3. Fie $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ numere complexe astfel încât $|\boldsymbol{a}-\mathbf{1}|=|\boldsymbol{b}-\mathbf{2}|=|\boldsymbol{c}+\mathbf{3}|$ şi $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$. Arătaţi că $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\mathbf{1}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}-\mathbf{4}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\mathbf{5}|$.

Soluţie: Fie A,B,C punctele de afixe $a-1, b-2,$ respectiv $c+3$. Cum acestea au modulele egale deduce că triunghiul ABC este înscris într-un cerc cu centrul în originea sistemului de axe. (**2p**)

Din relaţia $a+b+c=0$ deducem $a-1+b-2+c+3=0$ şi conform relaţiei lui Sylvester obţinem că afixul ortocentrului triunghiului ABC este 0, deci ortocentrul coincide cu central cercului circumscris. Obţinem astfel că triunghiul ABC este echilateral. (**3p**)

Lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $AB=|a-1-b+2|=|a-b+1|, AC=|a-c-4|, BC=|b-c-5|$ şi cum $AB=AC=BC$ rezultă concluzia. (**2p**)

4. a) Fie A o mulţime finită, nevidă şi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$ o funcţie injectivă. Arătaţi că f este surjectivă.

b) Fie $\boldsymbol{f}:\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots,\mathbf{63}\}\rightarrow\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots,\mathbf{63}\}$ o funcţie astfel încât $\boldsymbol{f}(\mathbf{1})+\boldsymbol{f}(\mathbf{2})+\boldsymbol{f}(\mathbf{3})+\cdots+\boldsymbol{f}(\mathbf{63})-\mathbf{1}=\mathbf{2016}$. Arătaţi că f nu este injectivă.

Soluţie: a) Considerăm $A=\{x_1,\ x_2,\ldots,x_n\}$. Cum f este injectivă, deducem că valorile $f(x_1), f(x_2),\ldots,f(x_n)$ sunt distincte, sunt în număr de n şi fac parte din mulţimea A. Deoarece $card(A)=n$ va rezulta că $A=$

$\{f(x_1)\ ,\ f(x_2), \dots, f(x_n)\}$, deci imaginea funcţiei coincide cu codomeniul, în concluzie f este surjectivă. (**3p**)

b) Presupunem prin reducere la absurd că f este injectivă. Conform a) deduce că f este şi surjectivă, deci $\{f(1)\,, f(2)\,, \dots, f(63)\} = \{1\,, 2\,, 3\,, \dots, 63\}$. (**2p**)

Relaţia $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(63) - 1 = 2016$ devine $1 + 2 + 3 + \cdots + 63 - 1 = 2016 \Leftrightarrow 2016 = 2017$, fals. (**2p**)