S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a

I. THEMA

Berechnet die Zahl und zeigt, dass rational ist:

$$A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \ldots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$$

II. THEMA

Zeigt, dass :

a) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$; oricare ar fi $n \in N^*$

b) $\frac{2013}{1\cdot2} + \frac{2012}{2\cdot3} + \frac{2011}{3\cdot4} + \ldots \frac{2}{2012\cdot2013} + \frac{1}{2013\cdot2014} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{2013}{2014}$

III. THEMA

Im Dreieck ABC, AM ist Seitenhalbierende, MD und ME sind die Winkelhalbierende der Winkel AMB und AMC (D $\in$ AB, E $\in$ AC). Wir bezeichnen mit N bzw. P die Projektionen der Punkte D und E auf AM. Zeigt, dass DP und EN parallel sind.

(G. M. nr 6-7-8, 2013)

IV. THEMA

Es seien die Punkte A, B, C, D , so dass $AB \parallel CD$ und $CD = \frac{AB}{2}$. Es sei $AD \cap BC = \{E\}$ und zwei verschiedene Punkte F und G, welche symmetrisch in Bezug auf C sind, wobei $F, G \notin BC$. Zeigt, dass die Geraden EG und BF:

a) parallel sind, wenn A und D auf derselben Seite der Gerade BC liegen

b) sich in Mittelpunkt der Strecke [BF] schneiden, wenn A und D auf verschidenen Seite der Gerade BC liegen

Constantin Bozdog,Reghin

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Probleme selectate de: prof. Angela Stoica. prof. Cornelia Căpușan, prof. Constantin Bozdog

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VII-a
Bareme de corectare

Subiectul I

Calculați numărul și arătați că este rațional:

A=$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+...+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$

Soluție:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$$
. . .

$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}=\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{4096575}}-\frac{\sqrt{2023}}{\sqrt{4096575}}$ .... (3p)

Prin însumare se obține A=1-$\frac{1}{\sqrt{2025}}$ .... (3p)

Finalizare A=$\frac{44}{45}\in Q$ .... (1p)

Subiectul II

Arătați că :

a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ aricare ar fi n$\in$N*

b) $\frac{2013}{1\cdot 2}+\frac{2012}{2\cdot 3}+\frac{2011}{3\cdot 4}+...\frac{2}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$

Soluție:

a)$\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{n^2-n^2+1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ deci propoziția este adevărată .... (3p)

b) se aplică relația pentru fiecare fracție

$$\frac{2013}{1\cdot 2}=2013\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{2012}{2\cdot 3}=2012\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{2011}{3\cdot 4}=2011\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$

. . .

$\frac{1}{2013\cdot 2014}=\left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right)$ ....(2p)

Adunăm relațiile și obținem

S=2013$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}.\ .\ .-\frac{1}{2014}=1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}+.\ .\ .+1-\frac{1}{2014}=$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+.\ .\ .+\frac{2013}{2014}$ .... (2p)

Subiectul III

În triunghiul ABC , AM este mediană , iar MD și ME sunt bisectoarele unghiurilor AMB respectiv AMC (D $\in$ AB, E$\in$ AC). Notăm cu N , respectiv P proiecțiile punctelor D si E pe AM . Arătați că DP și EN sunt paralele.

(gazeta matematica nr 6-7-8, 2013)

Soluție:

În triunghiurile ABM și AMC scriem teorema bisectoarei pentru bisectoarea MD respectiv ME și obținem:

$\frac{BM}{MA}=\frac{BD}{DA}$ respectiv $\frac{CM}{MA}=\frac{CE}{EA}$ (1)………..… 2p

AM mediana deci MB=MC , si inlocuim si aplicăm Reciproca Thales si deducem ca DE si BC sunt paralele………...…1p

Notam cu O intersectia dintre AM si DE.

Obținem că triunghiurile ADO și ABM sunt asemenea și deci $\frac{AD}{AB}=\frac{AO}{AM}=\frac{DO}{BM}$ (2)

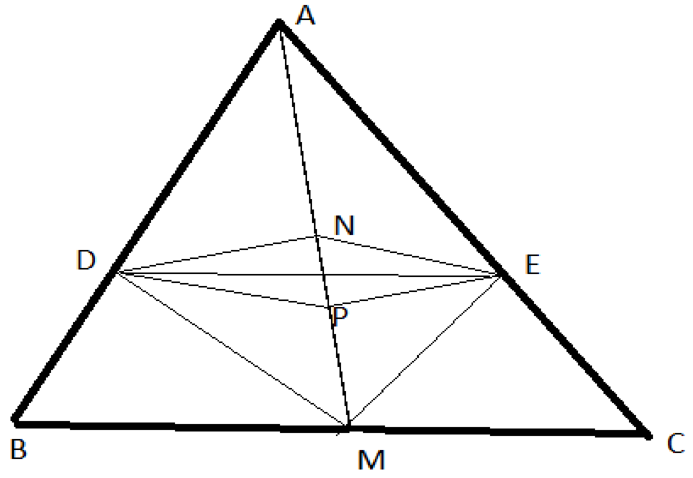
iar triunghiurile AOE și AMC sunt asemenea și deci

$\frac{AO}{AM}=\frac{AE}{AC}=\frac{OE}{MC}$ (3)

Din relatiile 1,2 , 3 deducem ca DO =OE . ……...….2p

Din congruenta triunghiurilor dreptunghice OPE și OND (cazul IU) avem că OP și ON sunt congruente.……...……1p

În patrulaterul DPEN avem DO =OE si OP=ON deci DPEN este paralelogram de unde concluzia ………………...………………1p.



Subiectul IV

Fie punctele A,B,C,D astfel incat AB$\parallel$ CD si CD=$\frac{AB}{2}$. Fie AD$\cap$BC={E} si doua puncte diferite F si G simetrice fata de C, unde F,G$\notin$BC. Aratati ca dreptele EG si BF sunt:

a) paralele dacă A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC;
b) concurente in mijlocul segmentului [BF], dacă A și D sunt de o parte și de alta a dreptei BC.

Constantin Bozdog,Reghin

Soluție:

Teorema fundamentală a asemanarii in ΔABE (CD$\parallel$ AB):ΔABE~ΔDCE

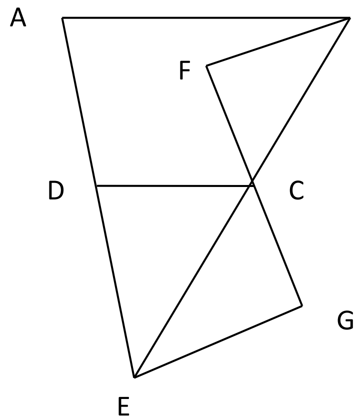
$\Rightarrow \frac{CE}{BE} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………2p

a) A si D de aceeasi parte a dreptei BC

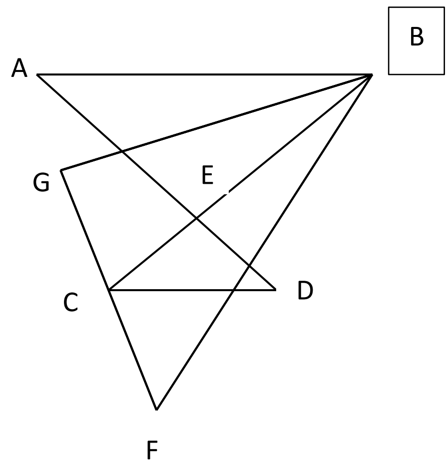
$\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ BC=CE

Dar CF=CG, deci BFEG paralelogram

$\Rightarrow BF \| EG$ …………………………………………2p



b) A si D de o parte si de alta a dreptei BC



$\frac{CE}{BE}=\frac{1}{2}$

CF=CG, deci E este centru de greutate in Δ BFG…………………………………………………….2p

$\Rightarrow$ GE mediana $\Rightarrow$ GE contine mijlocul segmentului [BF]…………………………………1p

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem