**MINISTERUL EDUCAȚIEI I CERCETĂRII**
**COLEGIUL NAIONAL “AL. I. CUZA”**

**Olimpiada Națională de Matematică**

**Etapa locală -februarie 2013**

# Clasa a IX-a

**Subiectul 1.**

Se consideră numerele $x, y, z \in (0, \infty)$ cu $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$

Demonstrați că : $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{1}{2}$.

**Subiectul 2.**

Rezolvați ecuația [*x*] ·{*x*}= *x* – 1, unde [*x*] reprezintă partea întreagă, iar {*x*} este partea fracționară a numărului real *x*.

(G.M. 2012)

**Subiectul 3.**

Se consideră triunghiul *ABC* cu notațiile cunoscute, şi punctul *D* astfel încât

$\overrightarrow{AD} = 3b\overrightarrow{AB} + 3c\overrightarrow{AC}$. Arătați că *(AD* este bisectoarea unghiului *A.*

**Subiectul 4.**

În patrulaterul *ABCD* se consideră $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ cu $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = k \in (0,1)$.

Arătați că $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{DC} + (1-k)\overrightarrow{AB}$

**Clasa a IX-a BAREM DE EVALUARE**

**Problema 1.** Se consideră numerele $x, y, z \in (0,\infty)$ cu $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$

Demonstrați că : $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}\geq\dfrac{1}{2}$.

**Soluție:**Avem $x-y+y-z+z-x=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-y^2}{x+y}+\dfrac{y^2-z^2}{y+z}+\dfrac{z^2-x^2}{z+x}=0$ ………………… **2p**

deci $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}=\dfrac{y^2}{x+y}+\dfrac{z^2}{y+z}+\dfrac{x^2}{z+x}$ …………………………………**1p**

de unde $\dfrac{x^2}{x+y}+\dfrac{y^2}{y+z}+\dfrac{z^2}{z+x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}+\dfrac{y^2+z^2}{y+z}+\dfrac{z^2+x^2}{z+x}\right)$………………………**1p**

Folosind inegalitate a mediilor $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\geq\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ obținem inegalitatea cerută……..**3p**

**Problema 2.** Rezolvați ecuația [*x*] ·{*x*}= *x* – 1, unde [*x*] reprezintă partea întreagă, iar {*x*} este partea fracționară a numărului real *x*.

**Soluție :** Cum $x=\{x\}+[x], \forall x\in\mathbb{R}$ avem
$[x]\cdot\{x\}=\{x\}+[x]-1$ deci $(\{x\}-1)([x]-1)=0$ …………**4p**

Dar $\{x\}\neq 1$ deci $[x]=1$ de unde $x\in[1,2)$ …………………………………………………**3p**

**Problema 3.** Se consideră triunghiul *ABC* cu notațiile cunoscute, şi punctul *D* astfel încât

$\overrightarrow{AD}=3b\overrightarrow{AB}+3c\overrightarrow{AC}$ . Arătați că *(AD* este bisectoarea unghiului *A.*

**Soluție :**

Folosind

în $\triangle ABC$ din teorema bisectoarei că $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{c}{b}=k$, cu $(AA'=$ bis$\angle A$ ……………..**2p**

punctul $A'$ determină raportul *k* pe (*BC*) deci
$\overrightarrow{AA'}=\dfrac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ ..**3p**

deci $\overrightarrow{AA'}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari , prin urmare (*AD* este bisectoare pentru *A*…………………………..**2p**

**Problema 4.** În patrulaterul *ABCD* se consideră $M \in (AD)$ şi $N \in (BC)$ cu $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = k \in (0,1)$ .

Arătați că $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{DC} + (1-k)\overrightarrow{AB}$

**Soluție :** Avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -k\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$ rel (1)……………………….**2p**

Analog $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + (k-1)\overrightarrow{BC}$ rel (2)………………..**2p**

Înmulțim rel (1) cu (1-*k*) iar rel (2) cu *k* şi obținem sumând cerința …………………..**3p**

100
2010
Anul Matematicii în
Școala Românească
www.anulmatematicii.ro

# OLIMPIADA DE MATEMATICÃ

## ETAPA LOCALÃ – ADJUD

### 9 februarie 2013

## *Clasa a IX-a*

**<u>Problema 1.</u>** a) Demonstrați inegalitatea : $(a \cdot x + b \cdot y)^2 \le (a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2)$, pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Ştiind cã $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x^2 + y^2 = 25$, arãtați cã $|3x + 4y| \le 25$.

**<u>Problema 2.</u>** Este posibil ca fiecare dintre ecuațiile urmãtoare :

$$x^2 - 2a \cdot x + b - \frac{1}{4} = 0,$$

$$x^2 - 2b \cdot x + c - \frac{1}{4} = 0,$$

$$x^2 - 2c \cdot x + a - \frac{1}{4} = 0 \text{ , } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

sã nu aibã rãdãcini reale?

(Problema 2 este din <u>*Gazeta Matematicã*</u> , nr.3/2012 , *Suplimentul de exerciții*)

**<u>Problema 3.</u>** Fie şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ de numere reale nenule definit prin $a_1 = \frac{1}{2}$ şi

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2n + 2 \text{ , } (\forall) n \ge 1 .$$

Sã se arate cã : $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_4 + a_3 \cdot a_5 + ..... + a_n \cdot a_{n+2} < \frac{1}{18}$.

(Problema 3 este din <u>*Gazeta Matematicã*</u> , nr.3/2012 , problema 26580)

**<u>Problema 4.</u>** În triunghiul ABC , mediana $[BD]$ , $D \in (AC)$, întâlneşte bisectoarea $[AF]$ , $F \in (BC)$ în punctul O. Raportul dintre aria triunghiului DOA şi aria triunghiului BOF este egalã cu $\frac{3}{8}$.

Arãtați cã $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$.

Subiecte propuse de : prof. Stoleru Cristian – Liceul “Emil Botta ” Adjud

# Barem de corectare -- Clasa a IX-a --

### Olimpiada de Matematică
### Etapa locală – 9 februarie 2013

**Problema 1.**

a) Ridicare la pătrat şi înmulţire.....................................................................................**(1p)**

$$2abxy \le a^2y^2 + b^2x^2 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \ge 0$$ (adevărat).

.............................................................**(2p)**

b) $a = 3$ , $b=4 \Rightarrow (3x+4y)^2 \le (3^2+4^2)(x^2+y^2)$ şi aplicând radicalul de ordin 2 rezultă concluzia .........**(4p)**

**Problema 2.**

Calculează discriminanţii ecuaţiilor:

$\Delta_1 = 4a^2 - 4\left(b - \frac{1}{4}\right), \Delta_2 = 4b^2 - 4\left(c - \frac{1}{4}\right), \Delta_3 = 4c^2 - 4\left(a - \frac{1}{4}\right)$.......**(2p)**

Ecuaţiile nu au rădăcini reale dacă

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 < 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 < 0 \Leftrightarrow (2a-1)^2 + (2b-1)^2 + (2c-1)^2 < 0$$

ceea ce este imposibil deoarece

$(2a-1)^2 \ge 0, \forall a \in \mathbb{R}$ ..............................................................**(4p)**

Concluzia : nu este posibil ca toate ecuaţiile să nu aibă rădăcinile reale ......................................**(1p)**

**Problema 3.**

Adună relaţiile :

$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} = 2n$ , $\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} = 2(n-1)$ , ..... , $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 2 \cdot 2$ ................................**(2p)**

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ şi

$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right)$ **(3p)**

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right) < \frac{1}{18}$$ ..............................................................(2p)

**Problema 4.**

$$\frac{S_{\Delta DOA}}{S_{\Delta BOF}} = \frac{\dfrac{AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD}{2}}{\dfrac{BO \cdot OF \cdot \sin \angle BOF}{2}} = \frac{AO}{OF} \cdot \frac{OD}{BO} = \frac{3}{8}$$ ........................................................................**(2p)**

În $\Delta ABC$, (AF=bisect.$\angle$ BAC $\Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{y}$ ......................................................**(1p)**

În $\Delta AFC$, $B - O - D$ transversala (Menelaos) $\Rightarrow \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{FO}{OA} = 1 \Rightarrow \frac{OA}{FO} = \frac{CB}{BF}$ ........................**(1p)**

În $\Delta BDC$, $F - O - A$ transversala (Menelaos) $\Rightarrow \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} \cdot \frac{DO}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{2BF}{FC}$ ......................**(1p)**

$\frac{AO}{OF} \cdot \frac{OD}{BO} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{CB}{BF} \cdot \frac{FC}{2BF} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{x+y}{x} \cdot \frac{y}{2x} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0$ ..................................**(1p)**

$3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0\Big|_{\cdot\frac{1}{x^2}} \Rightarrow 4t^2 + 4t - 3 = 0$, unde $\frac{y}{x} = t, \Rightarrow t = \frac{1}{2} = \frac{y}{x} = \frac{AC}{AB}$ ...................................**(1p)**