# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

**Clasa a XI – a**

## SUBIECTUL I (7 p)

Să se determine matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A^3 = \begin{pmatrix} 471 & 600 \\ 75 & 96 \end{pmatrix}$ și $tr(A) = 9$.

(S-a notat cu $tr(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $X, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**G.M. nr.12/2013**

## SUBIECTUL II (7 p)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se demonstreze că $1 < \log_{n^2+3n+1}(n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)) < 2$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \{\log_{n^2+3n+1} n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)\}$.

(s-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a).

## SUBIECTUL III (7 p)

Fie șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n \cdot a_n}$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \cdot \left( \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{2}{a_2} + \dfrac{3}{a_3} + \ldots + \dfrac{n}{a_n} \right)$.

## SUBIECTUL IV (7 p)

a) Dacă există $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ și $A^k = O_2$, atunci $A^2 = O_2$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $f(x) = x^n$ să fie o funcție surjectivă.

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**FAZA LOCALĂ-Botoșani, 22.02.2015**

**Clasa a XI-a BAREM DE NOTARE**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

| Nr. problemei | Soluţie, rezolvare | Punctaj |
|---|---|---|
| 1. | $\det\left(A^3\right)=216;$<br>$\det\left(A^3\right)=\left(\det A\right)^3=6^3 \Rightarrow \det A=6;$ | 2p |
| | *Teorema Hamilton – Cayley*: $A^2-tr(A)\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2, (\forall)A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$<br>$A^2-9\cdot A+6\cdot I_2=O_2 \Rightarrow A^3=9\cdot A^2-6\cdot A=75\cdot A-54\cdot I_2 \Rightarrow 75\cdot A=A^3+54\cdot I_2 \Rightarrow$ | 3p |
| | $75\cdot A=\begin{pmatrix}471 & 600\\ 75 & 96\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}54 & 0\\ 0 & 54\end{pmatrix}\Rightarrow 75\cdot A=\begin{pmatrix}525 & 600\\ 75 & 150\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$ | 2p |
| 2. | $1<\log_{n^2+3n+1}\left(n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\right)<2 \Leftrightarrow$<br>$n^2+3n+1<n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)<\left(n^2+3n+1\right)^2 \quad (1)$<br>Observând că $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\left(n^2+3n+1\right)^2-1\Rightarrow$<br>inegalitatea $(1)$ este adevarată. | 3p |
| | Din a) rezultă că<br>$\left\{\log_{n^2+3n+1} n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\right\}=\log_{n^2+3n+1} n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)-1=$<br>$\log_{n^2+3n+1}\left[\left(n^2+3n+1\right)^2-1\right]-1;$ | 2p |
| | Notând $n^2+3n+1=m\to\infty$, obţinem:<br>$\lim\limits_{m\to\infty}\left[\log_m\left(m^2-1\right)-1\right]=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{m^2-1}{m}}{\ln m}=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\ln m+\ln\left(1-\dfrac{1}{m^2}\right)}{\ln m}=1.$ | 2p |
| 3. | $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+n\cdot a_n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=n, n\geq 1;$ | 2p |

| | | |
|---|---|---|
| | $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1 \\ \frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=2 \\ \frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_3}=3 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a_n}=\frac{n^2-n+2}{2};$ <br> $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot\left(k^2-k+2\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k^3-k^2+2\cdot k\right)=$ <br> $\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{2\cdot n\cdot(n+1)}{2}\right);$ | **3p** |
| | $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{3}{a_3}+\ldots+\frac{n}{a_n}\right)=$ <br> $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+\frac{2\cdot n\cdot(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{8}$ | **2p** |
| **4.** | a) Dacă $A^k=O_2 \Rightarrow (\det A)^k=0 \Rightarrow \det A=0$. După Hamilton-Cayley avem $A^2-\alpha\cdot A+\det A\cdot I_2=O_2 \to A^2=\alpha A$. Se arată prin inducţie matematică că $A^k=\alpha^{k-1}\cdot A$. Din $A^k=O_2$ rezultă că $\alpha=0$ sau $A=O_2$ și în fiecare caz $A^2=O_2$. | **4p** |

| | | |
|---|---|---|
| | b) $f(x)=x,\ f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este surjectivă.<br>Presupunem prin reducere la absurd că:<br>$f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), f(x)=x^n$, cu $n\ge 2$ ar fi surjectivă. Deci pentru $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu $A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ există $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $X^n=A\Rightarrow X^{2n}=A^2=O_2$.<br>Dacă $X^{2n}=O_2$ rezultă că $X^2=O_2$. Dacă $X^2=O_2\Rightarrow X^n=O_2\Rightarrow A=O_2$, contradicţie. Deci răspunsul este $n=1$. | **3p** |