OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ- 22 februarie 2015

Clasa a XII – a

SUBIECTUL I (7 p)

Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie "$\circ$"prin $x \circ y = 3 \cdot x \cdot y + 6 \cdot x + 6 \cdot y + 10$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât legea de compoziţie "$\circ$"defineşte pe mulţimea $\mathbb{R} - \{a\}$ o structură de grup abelian.

b) Să se calculeze $x^{(n)}$, unde $x^{(n)} = \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x\ de\ n\ ori}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât (m, ∞) să fie parte stabilă în raport cu legea "$\circ$".

SUBIECTUL II (7 p)

Fie şirul cu termenul general $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} \cdot \left(tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x\right) dx$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \left(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1\right)$.

G. M. nr. 12/2013

SUBIECTUL III (7 p)

Fie $(G, \cdot)$ un grup. Să se demonstreze că dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$, $(\forall) x, y \in G$ şi $(xy)^n = (yx)^n$, $(\forall) x, y \in G$, atunci $(G, \cdot)$ este grup abelian.

SUBIECTUL IV (7 p)

Să se calculeze $\int \frac{1}{2 + \sin x} dx$, $x \in [0, 2\pi]$.

NOTĂ: Timp de lucru – **3 ore**

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 21 405 62 00, Fax: +40 21 405 63 00
www.edu.ro

Str. N. Iorga nr. 28, 710213, Botoşani
Tel: +40 231584 050, Fax: +40 231584 052
Email: office.isjbt@gmail.com
www.isj.botosani.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, Botoșani, 22.02.2015

Clasa aXII-a BAREM DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	a) $x \circ y = 3\cdot x\cdot y + 6\cdot x + 6\cdot y + 10 \Leftrightarrow x \circ y = 3\cdot(x+2)\cdot(y+2) - 2.$ Legea "$\circ$" este asociativă şi comutativă(se verifică efectiv).	**1p**
	Element neutru: $x \circ e = x \Leftrightarrow 3xe + 6x + 6e + 10 = x \Leftrightarrow 3xe + 5x + 6e + 10 = 0 \Leftrightarrow$ $x\cdot(3e+5) + 2\cdot(3e+5) = 0 \Rightarrow e = \frac{-5}{3}.$	
	Elemente simetrizabile: $3\cdot(x+2)\cdot(x'+2) - 2 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x'+2) = \frac{1}{9};$ $x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2;$ Atunci $x' = -2 + \frac{1}{9\cdot(x+2)};$ Rezultă $a = -2$.	1p
	b) $x \circ x = 3\cdot(x+2)^2 - 2;$ $x \circ x \circ x = 3^2\cdot(x+2)^3 - 2;$ . . . $x^{(n)} = 3^{n-1}\cdot(x+2)^n - 2,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$ Se demonstrează prin inducție matematică $x^{(n)} = 3^{n-1}\cdot(x+2)^n - 2,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$	**1p** **1p**
	c) Fie A=(m,∞) parte stabila în raport cu legea "$\circ$"; Din x, y>m$\Rightarrow$ $x \circ y$>m.	**1p**

	Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\ge1},\ (y_n)_{n\ge1},\ x_n > m,\ y_n > m,\ x_n \to m,\ y_n \to m;$ $3\cdot x_n\cdot y_n+6\cdot x_n+6\cdot y_n+10>m.$ Trecând la limită $\Rightarrow 3m^2+11m+10\ge 0\ \Rightarrow m\in(-\infty,-2]\cup\left[-\frac{5}{3},\infty\right);$ I. $m<-2$. Fie y=0, $x=-2+\frac{m+2}{2}>m;$ $x\circ y=6\cdot\frac{m+2}{2}-2=3m+4>m\Rightarrow m>-2(fals).$ II. $m=-2$, atunci $x>-2$, $y>-2\Rightarrow$ $x\circ y=3\cdot(x+2)\cdot(y+2)-2>-2(\text{adevărat})\Rightarrow m=-2$ *convine.* III. $m\ge-\frac{5}{3}$, atunci fie $x,y>m\Rightarrow x+2>m+2\ge\frac{1}{3};y+2>m+2\ge\frac{1}{3}\Rightarrow$ $3(x+2)(y+2)-2>3(m+2)^2-2;$ Să demonstrăm că $3(m+2)^2-2\ge m\Leftrightarrow 3m^2+11m+10\ge0(A)$ pentru că $m\in\left[-\frac{5}{3},\infty\right).$ Deci $m\in\left[-\frac{5}{3},\infty\right)$ *convine.* Soluția este $m\in\{-2\}\cup\left[-\frac{5}{3},\infty\right).$	**2p**
2.	$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot\left(tg^{n-1}x+tg^nx+tg^{n+1}x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot\left(1+tgx+tg^2x\right)dx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot\left(1+tg^2x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^nxdx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^{n-1}x\cdot(tgx)'\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^nxdx=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(tg^nx\right)'\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^nxdx=$ $\frac{1}{n}\cdot e^{nx}\cdot tg^nx\ \Big\|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}n\cdot e^{nx}\cdot tg^nxdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{nx}\cdot tg^nxdx=\frac{1}{n}\cdot e^{\frac{n\pi}{4}}.$	4p

Str. General Berthelot nr. 28-30, Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 21 405 62 00, Fax: +40 21 405 63 00
www.edu.ro

Str. N. Iorga nr. 28, 710213, Botoşani
Tel: +40 231584 050, Fax: +40 231584 052
Email: office.isjbt@gmail.com
www.isj.botosani.ro

	$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt[n^2]{n\cdot I_n}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{\pi}{4n}}-1}{\frac{\pi}{4n}}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}.$	3p
3.	Din $(m,n)=1\Rightarrow(\exists)\ p,q\in\mathbb{N}$ astfel încât $m\cdot p-n\cdot q=1$;	3p
	$x\cdot y=(xy)^{m\cdot p-n\cdot q}=(xy)^{m\cdot p}\cdot(xy)^{-n\cdot q}=\left((xy)^m\right)^p\cdot\left((xy)^n\right)^{-p}=$ $\left((yx)^m\right)^p\cdot\left((yx)^n\right)^{-p}$ $=(yx)^{m\cdot p}\cdot(yx)^{-np}=(yx)^{m\cdot p-n\cdot q}=yx$; $x\cdot y=y\cdot x\Rightarrow(G,\circ)$ este grup abelian.	4p
4.	Funcția $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin x},\ x\in[0,2\pi]$ este continuă pe $[0,2\pi]\Rightarrow$ f admite primitive pe $[0,2\pi]$.	1p
	Nu se poate folosi substituția $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ deoarece pentru $x=\pi\in[0,2\pi]$, $tg\dfrac{x}{2}$ nu este definită. Vom construi o primitivă a funcției f pe J, J interval, $J=[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$. Fie $G:J\to\mathbb{R}$, J interval, $J\subset[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]$, o primitivă a funcției f. Facem substituția $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Integrala asociată este $I_1=\displaystyle\int\frac{1+t^2}{2t^2+2t+2}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t^2+t+1}dt=\int\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt=$ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$; Fie $G(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}},\ x\in J$;	3p

	Construim o primitivă $F:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ a lui f pe $[0,2\pi]$, de forma $F(x)=\begin{cases}G(x), & x\in[0,\pi)\\ k', & x=\pi\\ G(x)+k, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ Pentru determinarea legăturii dintre constantele k şi k′ se impune condiţia de continuitate a funcţiei F în $x=\pi$. Funcţia F este continuă în $x=\pi \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}}F(x)=F(\pi)\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+k=k'\Rightarrow k=\frac{2\pi}{\sqrt{3}};k'=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$ $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}, x\in[0,\pi)\\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} \qquad , x=\pi\\ \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ $\int\frac{1}{2+\sin x}dx=F(x)+C,\ x\in[0,2\pi].$	**3p**