INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN DÂMBOVIŢA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 23.02.2014

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Aflaţi numerele raţionale a şi b, astfel încât $\frac{a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{b}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$ **.**

RMT 2/2010

SUBIECTUL 2

Fie $A_i=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_ni}$**, unde** $i\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **şi n un număr natural nenul.**

Arătaţi că $p=\sqrt{\left(A_1^2+A_4^2+A_6^2+A_7^2\right)\left(A_2^2+A_3^2+A_5^2+A_8^2\right)}$ **este număr natural.**

GM 5/2013(SUPLIMENT)

SUBIECTUL 3

În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor CC', A'D', C'D'.

a) **Aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreptele BM şi NP.**
b) **Dacă muchia cubului este de 6 cm, aflaţi aria triunghiului A'BM.**

GM 11/2013(SUPLIMENT)

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C', AB=AA'=12 cm.

a) **Determinaţi poziţia punctului M pe muchia AA', ştiind că distanţa de la punctul A la planul (MBC) este $3\sqrt{3}$ cm.**
b) **Dacă N şi P sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv CC', determinaţi sinusul unghiului dintre AP şi A'N.**

Prof. Damian Marinescu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1 **Aflaţi numerele raţionale a şi b, astfel încât $\frac{a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{b}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$.**

Deoarece $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$ şi $(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$, ecuaţia din enunţ se scrie: $\frac{a}{\sqrt{2}-1}-\frac{b}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$.	2p
Sau $a(\sqrt{2}+1)-b(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$.	2p
Apoi $a+b=(b-a+1)\cdot\sqrt{2}$, dar a şi b sunt numere raţionale şi $\sqrt{2}$ este iraţional,	1p
rezultă $b-a+1=a+b=0$.	1p
Se obţine $a=\frac{1}{2}$ şi $b=-\frac{1}{2}$.	1p

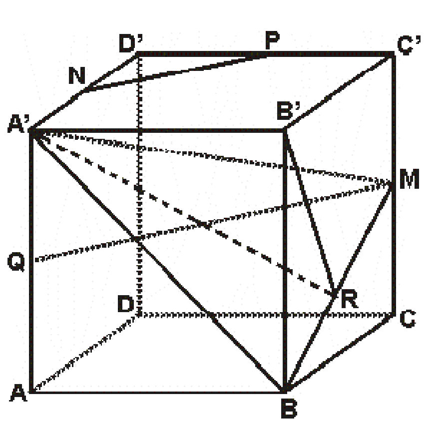
SUBIECTUL 2 **Fie $A_i=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n i}$, unde $i\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şi n un număr natural nenul. Arătaţi că $p=\sqrt{\left(A_1^2+A_4^2+A_6^2+A_7^2\right)\left(A_2^2+A_3^2+A_5^2+A_8^2\right)}$ este număr natural.**

Se notează cu $a=\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$, $p_1=A_1^2+A_4^2+A_6^2+A_7^2$ şi $p_2=A_2^2+A_3^2+A_5^2+A_8^2$, $p_1, p_2>0$ naturale.	2p
Demonstrăm că $p_1=p_2$. Avem $(10a+1)^2+(10a+4)^2+(10a+6)^2+(10a+7)^2=(10a+2)^2+(10a+3)^2+(10a+5)^2+(10a+8)^2$.	2p
Se calculează: $(10a+4)^2-(10a+3)^2+(10a+6)^2-(10a+5)^2=(10a+2)^2-(10a+1)^2+(10a+8)^2-(10a+7)^2$ sau	1p
$20a+7+20a+11=20a+3+20a+15$ (A).	1p
Şi atunci $p_1=p_2$, de unde $p=\sqrt{p_1\cdot p_2}=\sqrt{p_1^2}=p_1$, este număr natural.	1p

SUBIECTUL 3 **În cubul ABCDA'B'C'D' punctele M, N, P sunt mijloacele muchiilor CC', A'D', C'D'.**

a) Aflaţi o funcţie trigonometrică a unghiului format de dreptele BM şi NP.

b) Dacă muchia cubului este de 6 cm, aflaţi aria triunghiului A'BM.

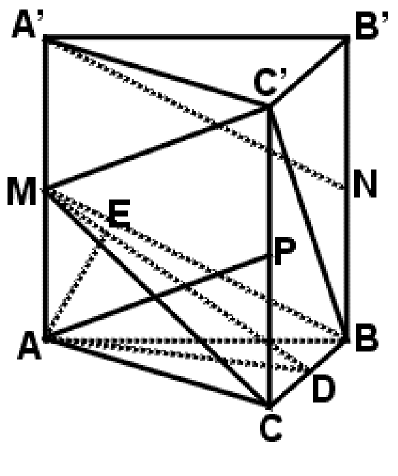


a) Fie Q mijlocul lui AA', NP‖QM, rezultă $m[\sphericalangle(BM, NP)]=m[\sphericalangle(BM, MQ)]$.	1p
Dacă a este muchia cubului, $\cos(\sphericalangle BMQ)=\frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.	2p
b) Fie $B'R\perp BM$. În $\Delta B'BM$: $BM\cdot B'R=6\cdot 6$, de unde $B'R=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.	1p
$A'R=\sqrt{A'B'^2+B'R^2}=\sqrt{36+\frac{144\cdot 5}{25}}=\frac{6}{5}\sqrt{25+20}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$.	1p
$\mathcal{A}_{A'BM}=\frac{BM\cdot A'R}{2}=3\sqrt{5}\cdot\frac{18\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{2}=27$.	2p

SUBIECTUL 4 **În prisma triunghiulară regulată ABCA'B'C', AB=AA'=12 cm.**

a) Determinaţi poziţia punctului M pe muchia AA', ştiind că distanţa de la punctul A la planul (MBC) este $3\sqrt{3}$ cm.

b) Dacă N şi P sunt mijloacele muchiilor BB', respectiv CC', determinaţi sinusul unghiului dintre AP şi A'N.



a) Dacă D este mijlocul muchiei BC, atunci $(AMD)\perp(MBC)$ şi distanţa de la A la (MBC) este AE, unde $AE\perp MD$, $E\in(MD)$.	1p
$AE=3\sqrt{3}$ şi $AD=6\sqrt{3}$, rezultă $m(\sphericalangle ADM)=30^0$. Dacă AM=x, MD=2x, se obţine în ΔAMD ecuaţia $4x^2-x^2=108$, de unde x=6. Sau x se poate obţine din relaţia $AM\cdot AD=MD\cdot AE$. Deci M este mijlocul muchiei AA'.	2p
b) Din MC' ‖ AP, MB ‖ A'N, rezultă că avem de calculat sinusul unghiului dintre MC' şi MB.	1p
$MC'=MB=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}$ şi $C'B=12\sqrt{2}$.	1p
$6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}\cdot\sin(\sphericalangle C'MB)=12\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{3}$.	1p
$\sin(\sphericalangle C'MB)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.	1p