Olimpiada Naţională de Matematică
Faza Locală Dâmboviţa – 23 Februarie 2014

CLASA A X-A

Subiectul 1. Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$(f \circ f \circ \dots \circ f)(-x) + (f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = 0,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ (funcția f se compune cu ea însăși de n ori în ambii termeni).

Gazeta Matematică 1981

Subiectul 2. Rezolvați în numere întregi ecuația: $2^{x+1} = x^2 + x + 1$.

Gazeta Matematică 1987

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{C}$ și funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definită prin $f(z) = z^2 + a|z| + b$.

i) Determinați $a, b \in \mathbb{C}$ astfel ca $f(1) = f(2) = 0$.

ii) Pentru a, b determinați la punctul anterior, aflați toate numerele complexe z cu $f(z) = 0$.

Gazeta Matematică 1980

Subiectul 4. Fie $a, b, c, d \geq 2$ numere naturale astfel încât

$$\log_a b = \frac{3}{2}, \qquad \log_c d = \frac{5}{4}$$

şi $a - c = 9$. Calculaţi $b - d$.

Gazeta Matematică 2013

Selecţie: Prof. univ. dr. habil. Cristinel Mortici

BAREM

CLASA A X-A

Subiectul 1. $f(f...f(x)) + f(f...f(-x)) = 2b(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1)$ **(2p)**; $b = 0$ este solutie **(1p)**; $a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1 = 0 \Rightarrow a^n = 1$ **(2p)**; daca n impar, nu sunt solutii pentru a **(1p)**; daca n par, $a = -1$ **(1p)**.

Subiectul 2. $x \leq -2 \Rightarrow 2^{x+1} \leq \frac{1}{2} < x^2 + x + 1$ **(2p)**; $x = -1$ solutie **(1p)**; afirma ca pentru $x \geq 1$, avem: $2^{x+1} > x^2 + x + 1$ **(1p)**; verificare $x = 1$ **(1p)**; demonstratia corecta a pasului de inductie **(2p)**.

Subiectul 3. i) $1 + a + b = 0$ **(1p)**; $4 + 2a + b = 0$ **(1p)**; $a = -3$, $b = 2$ **(1p)**. ii) pune $z = x + iy$ in $z^2 - 3|z| + 2 = 0$: $(x + iy)^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0$ **(1p)**; $\begin{cases} x^2 - y^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$ **(1p)**; Cazul $x = 0$ **(1p)**; Cazul $y = 0$ **(1p)**.

Subiectul 4. $a^{3/2} = b$, $c^{5/4} = d$ **(1p)**; $a^3 = b^2$, $c^5 = d^4$ **(1p)**; $a = x^2$, $b = x^3$ **(1p)**; $c = y^4$, $d = y^5$ **(1p)**; $a - c = x^2 - y^4 = 9$ **(1p)**; $(x - y^2)(x + y^2) = 9 \Rightarrow x = 5$, $y = 2$ **(1p)**; $b - d = x^3 - y^5 = 93$ **(1p)**.