INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a IX-a

SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația $\frac{x-2}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-6}{x}+......+\frac{2}{x}=12$

SUBIECTUL II

Fie mulțimile $A=\{x\in R \mid x^2+p_1x+q_1=0,\ p_1,q_1\in R\}$ şi $B=\{x\in R \mid x^2+p_2x+q_2=0,\ p_2,q_2\in R\}$ unde $p_1\cdot p_2=2(q_1+q_2)$. Să se arate că reuniunea celor două mulțimi este nevidă.

SUBIECTUL III

Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului C (O, R) şi $AB\cap CD=\{P\}$, arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.

SUBIECTUL IV

Fie x, y, z numere reale strict pozitive cu proprietatea că $x+y+z\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Să se arate că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2}\leq 3.$$

26612./ Gazeta de Matematică Nr. 5/2012

NOTĂ:
Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu maxim 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a IX-a

SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația $\frac{x-2}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-6}{x}+......+\frac{2}{x}=12$

(propusă de prof. Sîrb Vasile C.T. „A.P.I.” Zalău)

Barem de corectare
punem condiția $x \neq 0$.
Suma din membrul stâng are termenii în progresie aritmetică cu rația $r=\frac{-2}{x}$ 2p
Din formula termenului general $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ obținem $n=\frac{x-2}{2}$ 2p
Din suma $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$ avem: $12=\frac{\left(\frac{x-2}{x}+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{x-2}{2}}{2}$ sau $12=\frac{x-2}{4}$ 2p
de unde $x=50$ 1p

SUBIECTUL II

Fie mulțimile $A=\{x\in R \mid x^2+p_1x+q_1=0,\ p_1,q_1\in R\}$ şi $B=\{x\in R \mid x^2+p_2x+q_2=0,\ p_2,q_2\in R\}$ unde $p_1\cdot p_2=2(q_1+q_2)$. Să se arate că reuniunea celor două mulțimi este nevidă.

Selectată de prof. Bara Lajos din probleme OM, 1982

Barem de corectare

$A\cup B=\varnothing \Leftrightarrow \Delta_1<0, \Delta_2<0 \Rightarrow \Delta_1+\Delta_2<0$ 1 punct
$\Delta_1 = p_1^2 - 4\cdot q_1$ 1 punct
$\Delta_2 = p_2^2 - 4\cdot q_2$ 1 punct
$\Delta_1+\Delta_2 = p_1^2+p_2^2-4\cdot(q_1+q_2) = p_1^2 - 2\cdot p_1\cdot p_2 + p_2^2 = (p_1-p_2)^2 \geq 0$, 3 puncte
Prin urmare : $A\cup B \neq \varnothing$. 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

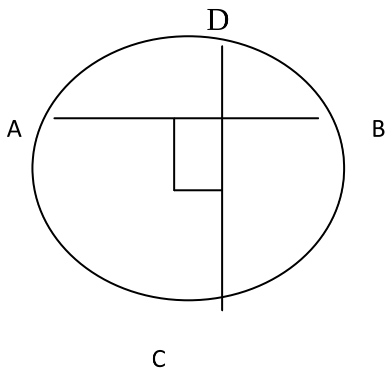
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SUBIECTUL III

Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului C (O, R) şi $AB \cap CD = \{P\}$, arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PO}$.

selectat de prof. Fărcaş Nicolae (C.N.S.) din culegere de probleme



$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD}\quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$$ 2 puncte

Fie M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$, atunci
$OM \perp AB$, $ON \perp DC$ şi din ipoteză $AB \perp CD$ 2 puncte

$\Rightarrow$ $ONPM$ dreptunghi $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$
şi $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$ 1 punct

Atunci: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OP}=$
$=4\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{PO}=2\overrightarrow{PO}$ 2 puncte

SUBIECTUL IV

Fie x, y, z numere reale strict pozitive cu proprietatea că $x+y+z \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Să se arate că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2} \leq 3.$$

26612./ Gazeta de Matematică Nr. 5/2012

Barem de corectare

Rescriem inegalitatea cerută astfel:

$$\frac{z^2-1}{x+y+z^2}+\frac{y^2-1}{x+z+y^2}+\frac{x^2-1}{y+z+x^2} \geq 0$$ 2 puncte

$$\Leftrightarrow \quad \sum \frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq 0$$ 1 punct

Arătăm că

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$$ 1 punct

Într-adevăr, pentru $x \geq 1$ avem $x-\frac{1}{x} \geq 0$ şi $x+\frac{y+z}{x} \leq x+y+z$ 1 punct

iar pentru $x<1$ avem $x-\frac{1}{x}<0$ şi $x+\frac{y+z}{x}>x+y+z$. 1 punct

Cum $\sum \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}=\frac{1}{x+y+z}\left(x+y+z-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right) \geq 0$

inegalitatea este demonstrată. 1 punct