Olimpiada naţională de matematică, faza locală, judeţul Caraş-Severin, 2016

Clasa a XII-a

I. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea "$\circ$" prin relaţia $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine elementele din $\mathbb{Z}$, simetrizabile în raport cu legea "$\circ$";

b) Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{2016} = x$.

***

II. a) Daţi un exemplu de funcţie continuă neconstantă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{4k+1}{4} \text{ şi } \int_1^2 f(x)dx = \frac{4k+15}{4}.$$

b) Daţi un exemplu de funcţie continuă neconstantă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$4 \cdot \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = 3.$$

RMCS 38

III. Se consideră funcţia $f:\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \cdot e^x.$

Dacă F este o primitivă a funcţiei considerate şi $F(0) = 1$, calculaţi $F(\frac{\pi}{3})$.

RMCS 30

IV. a) Se consideră un grup finit (G, o) de ordin impar şi $a, b, c \in G$ cu proprietatea că $a \circ b = c$ şi $c \circ b = a$. Demonstraţi că $a = c$.

b) Studiaţi dacă există $a, b, c \in (\mathbb{Z}_4, +)$ pentru care $a + b = c$, $c + b = a$ şi $a \neq c$.

Articol Gazeta Matematică 2010

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada naţională de matematică
Etapa locală, 5 martie 2016, Caraș - Severin

Clasa a XII a (Barem de corectare și notare)

1. a) elementul neutru este 3	**1p**
2p – elementele simetrizabile sunt 2 şi 4	**2p**
b) se demonstrează că $\underbrace{x \circ x \circ x \circ ... \circ x}_{2016} = (x-3)^{2016} + 3$	**3p**
numerele reale căutate sunt 2 şi 4	**1p**

2. a) Pare normal să căutăm o funcţie de gradul al treilea, ţinând cont mai ales de apariţia în dreapta a numărului $\frac{1}{4} = \int_0^1 x^3 dx$; un exemplu este $f(x) = x^3 + k, k \in \mathbb{Z}$.	**4p**
b) Folosind metoda integrării prin părţi poate ne vin idei, dar nu e obligatoriu... Un exemplu este în final $f(x) = x^3$.	**3p**

3. Derivata funcţiei $g : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{\cos x}$ este $g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$	**2p**
$f(x) = g'(x) \cdot e^x + g(x) \cdot e^x$, folosirea metodei integrării prin părţi	**2p**
$F(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot e^x + k$	**2p**
$F(0) = 1 \Rightarrow k = 0$, de unde $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}}$.	**1p**

4. a) Cum $a \circ b = c$ şi $c \circ b = a$, deducem $c \circ b \ \ \circ b = c$.	**2p**
Deoarece G este grup se ajunge la $b \circ b = e$.	**1p**
Cum $\lvert G \rvert = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, se obţine imediat $b = e$.	**1p**
Revenind în $a \circ b = c$, rezultă $a = c$.	**1p**
b) De exemplu, $a = \hat{0}, b = \hat{2}, c = \hat{2}$ îndeplinesc condiţiile cerute. (verificare !)	**2p**