OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 28 februarie 2015

Clasa a X-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi numerele $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ şi $z_1 + z_2 + ... + z_n = 0$.

   (a) Demonstraţi că $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

   (b) Demonstraţi că $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leq n\sqrt{2}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$.

Gazeta Matematică 12/2014

2. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{1}{4^x + 1} + \frac{1}{2^x \cdot 3^x - 1} = \frac{2^x}{4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x}.$$

Marin Marin

3. Rezolvaţi ecuaţia $\left[\log_{2015}[\log_{2015} x]\right] = 1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Ioana Maşca

4. Determinaţi valorile reale x, y, z, pentru care

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x. \end{cases}$$

Sorina Stoian

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Clasa a X a

1. *Fie* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *şi numerele* $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *astfel încât* $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$ şi $z_1+z_2+...+z_n = 0$.

(a) *Demonstraţi că* $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + ... + |z - z_n|^2 = n|z|^2 + n$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$.

(b) *Demonstraţi că* $|z - z_1| + |z - z_2| + ... + |z - z_n| \leqslant n\sqrt{2}$, *pentru orice* $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant 1$.

Soluţie.
(a) Avem $|u|^2 = u\overline{u}, \ \forall\ u \in \mathbb{C}$. **(1p)**
Atunci, pentru $z \in \mathbb{C}$,

$$|z - z_k|^2 = (z - z_k)\overline{(z - z_k)} = |z|^2 - z\overline{z}_k - \overline{z}z_k + |z_k|^2 = |z|^2 - z\overline{z}_k - \overline{z}z_k + 1,\ k = \overline{1, n}. \quad (2\text{p})$$

Prin sumarea relaţiilor de mai sus, obţinem (în conformitate cu ipoteza)

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = n|z|^2 - z\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k\right) - \overline{z}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) + n = n|z|^2 + n,\ \forall\ z \in \mathbb{C}. \qquad (\mathbf{1p})$$

(b) Folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică, deducem

$$\frac{|z - z_1| + ... + |z - z_n|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{|z - z_1|^2 + ... + |z - z_n|^2}{n}},\ z \in \mathbb{C}.$$

Atunci, aplicând identitatea de la (a), obţinem

$$|z - z_1| + ... + |z - z_n| \leqslant n\sqrt{\frac{n|z|^2 + n}{n}} \leqslant n\sqrt{\frac{n + n}{n}} = n\sqrt{2},\ \forall\ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1. \qquad (\mathbf{3p})$$

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\frac{1}{4^x+1} + \frac{1}{2^x \cdot 3^x - 1} = \frac{2^x}{4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x}$.
Soluţie.
Ecuaţia este definită pe domeniul $D = \mathbb{R}^* \setminus \{x \in \mathbb{R} | 4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^x - 3^x = 0\}$. **(1p)**
Ecuaţia poate fi scrisă în forma

$$2^x\left(6^x + 3^x + 2^x - 1\right)\left(6^x - 3^x - 2^x - 1\right) = 0,\ x \in D.$$

Rezultă $6^x + 3^x + 2^x - 1 = 0$ sau $6^x - 3^x - 2^x - 1 = 0$. **(2p)**
i. Rezolvăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia $6^x + 3^x + 2^x - 1 = 0$ sau $6^x + 3^x + 2^x = 1$.
Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\ f(x) = 6^x + 3^x + 2^x$. f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ şi $f(-1) = 1$. Deducem că ecuaţia $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$, are rădăcina unică $x_1 = -1$.**(2p)**
ii. Rezolvăm ecuaţia $6^x - 3^x - 2^x - 1 = 0$, echivalentă cu $f(-x) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$). Deducem că ecuaţia considerată are rădăcina unică $x_2 = 1$.
Deoarece $-1, 1 \in D$, ecuaţia dată are soluţiile $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$. **(2p)**

3. *Rezolvaţi ecuaţia* $\left[\log_{2015}[\log_{2015} x]\right] = 1$, *unde* $[a]$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* a.
Soluţie.
Ecuaţia este definită pentru $x \in [2015, \infty)$. **(1p)**
Avem

$$\left[\log_{2015}[\log_{2015} x]\right] = 1 \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \log_{2015}\left[\log_{2015} x\right] < 2 \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Leftrightarrow\ 2015 \leqslant [\log_{2015} x] < 2015^2. \quad (\mathbf{1p})$$

$$\Leftrightarrow\ [\log_{2015} x] \in \{2015, 2016, ..., 2015^2 - 1\}\ \Leftrightarrow\ \log_{2015} x \in \left[2015, 2015^2\right). \quad (\mathbf{2p})$$

Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei este

$$S = \left[2015^{2015}, 2015^{2015^2}\right). \quad (\mathbf{2p})$$

4. *Determinaţi valorile reale x, y, z, pentru care*

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x. \end{cases}$$

Soluţie.
Fie $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o soluţie a sistemului. Avem $x, y, z \geqslant 0$. **(1p)**
Din inegalitatea mediilor rezultă

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{2} \geqslant \sqrt{x^2 \cdot 1} = x \\ \frac{y^4+y^2+1}{3} \geqslant \sqrt[3]{y^6} = y^2 \\ \frac{z^6+z^4+z^2+1}{4} \geqslant \sqrt[4]{z^{12}} = z^3 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{2x^2}{x^2+1} \leq x \\ \frac{3y^3}{y^4+y^2+1} \leq y \\ \frac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} \leq z \end{cases} \quad . \quad \textbf{(3p)}$$

Rezultă $y \leq x,\ z \leq y$ şi $x \leq z$, de unde $x = y = z$. **(1p)**
Obţinem soluţiile $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ şi $x_2 = y_2 = z_2 = 1$. **(2p)**