OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A V-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Deschizând manualul de matematică la întâmplare, constatați că suma numerelor ce indică cele două pagini este 293. Aflați numerele scrise pe cele două pagini.

(problema 10/41, manual Matematică pentru clasa a 5-a, Editura Radical)

2. Fie mulțimile: A$=\{p^2|p\in\mathbb{N}\}$, $B=\{5n+2|n\in\mathbb{N}\}$, $C=\{7m+3|m\in\mathbb{N}\}$, $D=\{9^k\,|k\in\mathbb{N}^*,\ k\leq 2012\}$. Arătați că:

a) $A\cap B=\emptyset$

b) $2012\in B\cap C$

c) $D\subset A$

d) 9^{2011} se poate scrie ca sumă de două cuburi perfecte, iar 9^{2012}ca sumă de trei pătrate perfecte.

(Dorina Bocu, Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2014, Editura Bîrchi)

3. Numim număr *,,preferat''* orice număr natural de trei cifre nenule diferite, care are proprietatea că produsul cifrelor sale este pătrat perfect.

a) Scrieți două numere *,,preferate''* care au ultima cifră 2.

b) Câte numere *,,preferate''* există?

c) Stabiliți dacă suma tuturor numerelor *,,preferate''* este pătrat perfect.

(Gheorghe Radu, Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2014, Editura Bîrchi)

4. Să se arate că orice număr de forma $M=\overline{xy3}^1+\overline{xy3}^2+\overline{xy3}^3+\ \ldots\ +\overline{xy3}^{100}$ se divide cu 10.

(Ionuț Mazalu, Brăila problema S:E14.206 GM 9/2014)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A V-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
- deduce că cele două pagini sunt numerotate cu 146 și 147 ……………………………….	5 p
- demonstrează că rezultatul e viabil, pagina din dreapta este numerotată cu un număr impar. ……………………………………………………………………………………..	2 p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) - dacă $x = 5n + 2 \in B$, x are ultima cifra 2 sau 7…………………………………….. - în acest caz x nu poate fi pătrat perfect. Rezultă $A \cap B = \emptyset$ …………………………...	1 p 1 p
b) $2012 = 5 \cdot 402 + 2 \in B$ și $2012 = 7 \cdot 287 + 3 \in C$; deci $2012 \in B \cap C$	2 p
c) dacă $y \in D \Rightarrow y = 9^k = \left(3^k\right)^2 \Rightarrow y \in A$, deci $D \subset A$……………………………………	1 p
d) $9^{2011} = 9^{2010} \cdot 9 = 9^{2010} \cdot (1+8) = 9^{2010} + 8 \cdot 9^{2010} = \left(9^{670}\right)^3 + \left(2 \cdot 9^{670}\right)^3$ ……………………... $9^{2012} = 9^2 \cdot 9^{2010} = (1+16+64) \cdot \left(9^{1005}\right)^2 = \left(9^{1005}\right)^2 + \left(4 \cdot 9^{1005}\right)^2 + \left(8 \cdot 9^{1005}\right)^2$ ………………	1 p 1 p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) de exemplu 362 si 632 sunt numere *„preferate”* pentru că $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$	2 p
b) - Cu numerele 2, 3, 6 sunt 6 numere *„preferate”*: 236, 263, 326, 362, 623, 632. - $1 \cdot 4 \cdot 9 = 6^2$. Cu numerele 1, 4, 9 sunt 6 numere *„preferate”*. - $1 \cdot 2 \cdot 8 = 4^2$. Cu numerele 1, 2, 8 sunt 6 numere *„preferate”*. - $2 \cdot 4 \cdot 8 = 8^2$. Cu numerele 2, 4, 8 sunt 6 numere *„preferate”*. - $2 \cdot 8 \cdot 9 = 12^2$. Cu numerele 2, 8, 9 sunt 6 numere *„preferate”*. - $3 \cdot 6 \cdot 8 = 12^2$. Cu numerele 3, 6, 8 sunt 6 numere *„preferate”*. Total: $6 \cdot 6 = 36$ numere *„preferate”*.	2 p 1 p
c) - suma numerelor *„preferate”* scrise cu cifrele a, b, c este $222(a+b+c)$…………… - suma numerelor preferate este 222·67 care nu este pătrat ……………………………	1 p 1 p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	Barem asociat
- arată că suma a patru puteri consecutive a unui număr natural care are ultima cifra 3 este multiplu de 10…………………………………………………………………………....	3 p
- descompune M în suma a 25 de numere divizibile cu 10 …………………………………	4 p