OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $13\{x\}^2 - 1013x + 2013\{x\} = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului *x*.

Manuela Stroie şi Iulian Stroie, Balş

Problema 2. În planul paralelogramului *ABCD* se consideră punctele *P* şi *Q* astfel încât $\overrightarrow{DP} = p \cdot \overrightarrow{DC}$ şi $\overrightarrow{BQ} = q \cdot \overrightarrow{BC}$, unde $p, q \in \mathbb{R}$.
Arătaţi că punctele *A*, *P* şi *Q* sunt coliniare dacă şi numai dacă $pq = 1$.

Titu Vîrban, Caracal

Problema 3. Fie progresiile aritmetice $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$. Arătaţi că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$, definit prin $z_n = x_n \cdot y_n$, este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $(x_n)_{n\geq 1}$ sau $(y_n)_{n\geq 1}$ este constantă.

Dan Brânzei

Problema 4. Fie *H* ortocentrul şi *O* centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*. Se notează cu O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor *HBC*, *HCA*, respectiv *HAB*.
Arătaţi că $\overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OO_b} + \overrightarrow{OO_c} = 2\overrightarrow{OH}$.

Costel Anghel, Scorniceşti

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013 - Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $13\{x\}^2 - 1013x + 2013\{x\} = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

Manuela Stroie şi Iulian Stroie, Balş

Problema 2. În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $\overrightarrow{DP} = p \cdot \overrightarrow{DC}$ şi $\overrightarrow{BQ} = q \cdot \overrightarrow{BC}$, unde $p, q \in \mathbb{R}$.
Arătaţi că punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $pq = 1$.

Titu Vîrban, Caracal

Problema 3. Fie progresiile aritmetice $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$. Arătaţi că şirul $(z_n)_{n\ge1}$, definit prin $z_n = x_n \cdot y_n$, este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $(x_n)_{n\ge1}$ sau $(y_n)_{n\ge1}$ este constantă.

Dan Brânzei

Problema 4. Fie H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se notează cu O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB.
Arătaţi că $\overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OO_b} + \overrightarrow{OO_c} = 2\overrightarrow{OH}$.

Costel Anghel, Scorniceşti

Problema 1. Avem $x = [x] + \{x\} \Rightarrow 13\{x\}^2 + 1000\{x\} = 1013[x]$ .... (1p)

$\{x\} \in [0,1) \Rightarrow 13\{x\}^2 + 1000\{x\} \in [0,1013) \Rightarrow 1013[x] \in [0,1013)$ .... (2p)

Din $[x] \in \mathbb{Z}$ şi din relaţia anterioară rezultă $[x] = 0$ .... (2p)

Notând $\{x\} = t$, rezultă $13t^2 + 1000t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow x = 0$ .... (1p)

$t_2 = -\frac{1000}{13} \notin [0,1)$ nu convine .... (1p)

Problema 2. Avem $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AD} + p \cdot \overrightarrow{DC} = p \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .... (2p)

şi $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AD}$ .... (2p)

Punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ sunt coliniari, ceea ce este revine la faptul că vectorii $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ au coordonatele proporţionale în descompunerea după direcţiile necoliniare $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ .... (2p)

Ca urmare, punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{p}{1} = \frac{1}{q}$, adică $pq = 1$ .... (1p)

Problema 3. Dacă progresia $(y_n)_{n\ge1}$ este constantă, se constată că $(z_n)_{n\ge1}$ este progresie aritmetică .... (2p)

Pentru implicaţia inversă, ne restrângem atenţia la trei termeni consecutivi ai fiecărei progresii: $(a-r, a, a+r)$, respectiv $(c-q, c, c+q)$. Pentru ca produsele să fie în progresie aritmetică, trebuie să avem $(a-r)(c-q) + (a+r)(c+q) = 2 \cdot ac$, ceea ce revine imediat la $r \cdot q = 0$, de unde $r = 0$ sau $q = 0$, adică concluzia .... (5p)

Problema 4. Punctul A este ortocentrul triunghiului BCH .... (2p)

Din relaţia lui Sylvester, rezultă că $\overrightarrow{O_aA} = \overrightarrow{O_aB} + \overrightarrow{O_aC} + \overrightarrow{O_aH}$, deci $\overrightarrow{O_aB} + \overrightarrow{O_aC} = \overrightarrow{O_aA} - \overrightarrow{O_aH} = \overrightarrow{HA}$

Dar $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, de unde $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AH}$, deci $\overrightarrow{O_aB} + \overrightarrow{O_aC} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

De aici rezultă că $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO_a} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, adică $\overrightarrow{OO_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .... (4p)

Analog obţinem $\overrightarrow{OO_b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OO_c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, iar prin adunarea acestor trei relaţii analoage rezultă: $\overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OO_b} + \overrightarrow{OO_c} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{OH}$ .... (1p)