INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN PRAHOVA

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 15.02.2015 –
CLASA A IX-A
Subiecte

1. Demonstrați că:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1}<1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}$$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

***

2. Demonstrați că pentru orice $x, y, z \in (-a\,;\,a)$, avem :

$$\frac{1}{a^2-x^2}+\frac{1}{a^2-y^2}+\frac{1}{a^2-z^2} \geq \frac{1}{a^2-xy}+\frac{1}{a^2-xz}+\frac{1}{a^2-yz}$$

Prof. Petre și Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Fie *ABCD* un patrulater convex, *E* mijlocul diagonalei $[AC]$ și *P* un punct oarecare în plan. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PE}$ dacă și numai dacă *ABCD* este parallelogram.

***

3. Fie cercurile C1 şi C2 de centre O_1 si O_2 secante în A si B . O dreaptă variabilă ce trece prin B taie cercurile a doua oară în C respectiv D . Fie H_1 - ortocentrul ΔABC , H_2 - ortocentrul ΔABD , A_1 si A_2 punctele diametral opuse lui A în cele două cercuri .

Demonstraţi că : a) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{H_2H_1} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$; b) $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{A_2D}$.

Prof. Claudiu Militaru ,Ploiești

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.